Übungen zu Analysis II

Blatt 11

1. Sei $\Phi(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r>0, \theta\in\mathbb{R}$. Ist $f \in C^2(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$, so bezeichne $\tilde f(r,\theta) := (f\circ\Phi)(r,\theta)$ die Darstellung von f in Polarkoordinaten. $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ bezeichne den Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^2$ (siehe Aufgabenblatt 10).

   (a) Zeigen Sie:
   $$(\Delta f)(\Phi(r,\theta)) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\tilde f(r,\theta).$$

   (b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a) die Identität $\Delta N = 0$ für die Funktion $N\colon \mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\,;x\mapsto \log(\|x\|)$ (vergleiche Aufgabe 10.2).

2. Sei $\alpha\in\mathbb{R}$ und $f\colon\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ differenzierbar. Es gelte $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ und $t>0$. Zeigen Sie, daß dann gilt:
   $$f'(x)x = \alpha f(x), \quad x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

3. (a) Sei $A\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n\times n})$, wobei $\mathbb{R}^{n\times n}$ den Raum aller reellen $n\times n$-Matrizen bezeichne. Für jedes $t\in\mathbb{R}$ sei $A(t)$ eine orthogonale Matrix, d.h. ${}^tA(t)\cdot A(t) = I$. Ferner sei $A(0) = I$. Zeigen Sie:

   (i) $\det A(t) = 1$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

   (ii) Ist A differenzierbar, so ist $S := \frac{dA}{dt}(0)$ schiefsymmetrisch, d.h. ${}^tS = -S$.

   (b) Im folgenden sei $\mathbb{R}^2$ als Raum von Spaltenvektoren aufzufassen. Seien $x,y\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ differenzierbar. Es gelte $(x(0)\ y(0)) = I$ und $\det(x(t)\ y(t)) = 1$ für alle $t\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß dann $\mathrm{Spur}\big(\frac{dx}{dt}(0)\ \frac{dy}{dt}(0)\big) = 0$ gilt.
   Hinweis: $B(x,y) := \det(x\ y)$ definiert ein bilineares Produkt auf $\mathbb{R}^2$.

4. Sei $A_n := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{2k}{3^n}, \frac{2k+1}{3^n}\right]$, für $n\in\mathbb{N}$, sowie $C_n := A_0\cap\cdots\cap A_n\cap[0,1]$. Die Menge $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ heißt das „Cantorsche Diskontinuum“. Zeigen Sie:

   (i) C ist kompakt.

   (ii) $C = \left\{\sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j} : a_j\in\{0,2\}\right\}$.

   (iii) C ist **total unzusammenhängend**, d.h. es gibt keine zusammenhängende Teilmenge von C mit mehr als einem Punkt.

Abgabe der Lösungen: Fr, 23.6.2006, 10.00 im Schrein