Übungen zu Analysis II

Blatt 10

1. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^3$ durch $f(x,y) := (\sqrt{x^2+y^2}, \sin(xy), y^x)$ definiert.

   Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung von f und stellen Sie die Jacobi-Matrix von f auf.

2. Für $n \geq 2$ bezeichne

$$N \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R};\ N(x) := \begin{cases} ||x||^{2-n}, & n \geq 3 \\ \log \|x\|, & n = 2 \end{cases}$$

   das **Newton-Potential** auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

   (a) Berechnen Sie die „Gravitationskraft“ $F := -\nabla N$.

   (b) Zeigen Sie, daß N in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ der „Laplace-Gleichung“ $\Delta N = 0$ genügt, wobei $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ den **Laplace-Operator** bezeichne.

3. (a) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \colon U \to \mathbb{R}$ sowie $\varphi \colon]a,b[\to U$. Ferner seien f und φ differenzierbar und die Abbildung $f \circ \varphi$ konstant auf $]a,b[$. Zeigen Sie, daß dann $(\nabla f)(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$ für alle $t \in]a,b[$ gilt.

   (b) Es bezeichne E den normierten Vektorraum $E = (C([0,1],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$. Bestimmen Sie die totale Ableitung f' der Abbildung $f : E \to \mathbb{R}$, mit

$$f(\varphi) := \int_0^1 \varphi(t)^2 dt,\ \varphi \in E.$$

4. Seien $a < b$ und $U \subset \mathbb{R}$ offen. Außerdem sei $f \colon [a,b] \times U \to \mathbb{R}; (t,s) \mapsto f(t,s)$ eine stetige Funktion, deren partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial s}$ auf $[a,b] \times U$ existiert und stetig ist.

   (a) Zeigen Sie, daß für $(t,s) \in [a,b] \times U$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $[s-|h|, s+|h|] \subset U$ gilt:

$$\left| f(t,s+h) - f(t,s) - \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)h \right| \leq |h| \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \left| \frac{\partial f}{\partial s}(t,s+\theta h) - \frac{\partial f}{\partial s}(t,s) \right|.$$

   (b) Zeigen Sie, daß durch $F(s) := \int_a^b f(t,s)dt$ eine differenzierbare Abbildung auf U definiert wird mit Ableitung

$$\frac{dF}{ds}(s) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)dt.$$

Abgabe der Lösungen: Fr, 16.6.2006, 10.00 im Schrein