Übungen zu Analysis II

Blatt 9

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und bezeichne δ die diskrete Metrik auf der Menge $\{0, 1\}$. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) X ist zusammenhängend.

   (b) Jede stetige Funktion $f\colon (X, d) \to (\{0, 1\}, \delta)$ ist konstant.

2. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

   (a) Seien $A, B \subset X$ zusammenhängend. Zeigen Sie:

   (i) $\overline{A}$ ist zusammenhängend.

   (ii) Gilt $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$, so ist auch $A \cup B$ zusammenhängend.

   (b) Für $x \in X$ bezeichne Z_x die Menge aller zusammenhängenden Teilmengen von X, welche x enthalten. Zeigen Sie:

   (i) $Z_x \neq \emptyset$.

   (ii) $C_x := \bigcup\limits_{A \in Z_x} A$ ist eine zusammenhängende Teilmenge von X, welche x enthält (die sogenannte **Zusammenhangskomponente** von x).

   (iii) Für $y \notin C_x$ ist $C_y \cap C_x = \emptyset$.

3. Zeigen Sie, daß die Menge $\{(x, \sin(1/x))\colon x > 0\} \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

4. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer abgeschlossener Teilmengen in einem kompakten metrischen Raum (X, d) mit $A_{n+1} \subset A_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   Zeigen Sie, daß $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

5.* Seien $1 \le p \le \infty$ und q so, daß $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

   (a) Ist $g \in \ell^q(\mathbb{N})$, so wird durch $\lambda_g : \ell^p(\mathbb{N}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)g(n)$, eine stetige Linearform λ_g auf $\ell^p(\mathbb{N})$ definiert, für deren Operatornorm gilt: $\|\lambda_g\|_{\text{op}} = \|g\|_q$.

   (b) Jede stetige Linearform λ auf $\ell^p(\mathbb{N})$ ist von der Form $\lambda = \lambda_g$, mit $g \in \ell^q(\mathbb{N})$.

Abgabe der Lösungen: Fr, 9.6.2006, 10.00 im Schrein