Übungen zu Analysis II

Blatt 8

1. (a) Sei $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie: Die Abbildungen $\text{add} : V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v + w$ und $s : \mathbb{K} \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ sind stetig.

   (b) Seien $(V, ||\cdot||_V)$ ein normierter Vektorraum und $(W, \|\cdot\|_W)$ ein Banachraum. Ferner seien $V_0 \subset V$ ein dichter linearer Teilraum von V und $T : V_0 \to W$ eine stetige lineare Abbildung. Zeigen Sie: T läßt sich eindeutig zu einer stetigen linearen Abbildung $\overline{T} : V \to W$ fortsetzen. Für diese gilt: $\|\overline{T}\|_{\text{op}} = \|T\|_{\text{op}}$.

   (c) Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Norm $\|A\|_{\text{op}}$ des linearen Operators $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, mit $A(x_1, \ldots, x_n) := (\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_n x_n)$. Der $\mathbb{R}^n$ sei hierbei mit der Euklidischen Norm versehen.

2. Seien (X, d) ein metrischer Raum und A, B Teilmengen von X. Zeigen Sie:

   (a) Sind A und B kompakt, so gibt es Punkte $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ mit $d(A, B) = d(a_0, b_0)$. Insbesondere ist $d(A, B) > 0$, falls $A \cap B = \emptyset$.

   (b) Geben Sie zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen A, B des $\mathbb{R}^2$ an, mit $d(A, B) = 0$. Kann eine davon kompakt sein?

3. (a) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie: A ist genau dann total beschränkt, wenn $\overline{A}$ total beschränkt ist.

   (b) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann total beschränkt, wenn sie beschränkt ist.

4. Beweisen Sie, daß jede Isometrie von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ von der Gestalt $x \mapsto ax + b$, mit $a \in \{-1, 1\}$ und $b \in \mathbb{R}$ ist.

5.* Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$. Dann ist A genau dann total beschränkt, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.

Abgabe der Lösungen: Fr, 2.6.2006, 10.00 im Schrein