Übungen zu Analysis II

Blatt 6

Um die Aufgabe 2 zu bearbeiten, benötigt man folgende Definition: Sind (X, d) und (Y, ρ) metrische Räume und ist $f\colon X \to Y$, so heißt f **Lipschitz-stetig** auf X, falls ein $C \geq 0$ existiert mit

$$\rho(f(x), f(y)) \leq C\, d(x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$

1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall positiver Länge, und sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß der Raum $C^k(I)$, versehen mit der Norm

   $$\|f\|_{C^k} := \max_{0 \leq j \leq k} \|f^{(j)}\|_\infty \quad ,$$

   ein Banachraum ist.

   Hinweis: Benutze die Vollständigkeit von $C(I)$.

2. (a) Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig.

   (b) Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine nichtleere Menge. Zeigen Sie, daß die Abbildung

   $$x \mapsto d(x, A)$$

   auf X Lipschitz-stetig ist.

   (c) Seien (X, d) und (Y, ρ) metrische Räume, $f\colon X \to Y$ und $\emptyset \neq U \subset X$ offen. Zeigen Sie, daß $f|_U\colon U \to Y$ genau dann stetig ist, wenn f **auf** U **stetig ist**, d.h. in jedem Punkt $x \in U$ stetig ist.

3. Seien (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie:

   (a) Ist $B \subset X$ abgeschlossen und $A \subset B$, so gilt auch $\overline{A} \subset B$.

   (b) $\overline{A} = \bigcap_{B \supset A,\, B \text{ abgeschlossen}} B.$

   (c) $\overline{A} = \{x \in X \colon\ d(x, A) = 0\}$.

4. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

   (a) Durch $d'(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ wird ebenfalls eine Metrik auf X definiert. Diese ist durch 1 beschränkt.

   (b) d' erzeugt dieselbe Topologie wie d.

   (c) d und d' sind im allgemeinen nicht äquivalent.

Abgabe der Lösungen: Fr, 19.5.2006, 10.00 im Schrein