Übungen zu Analysis II

Blatt 2

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f \in C(]a, b])$. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) f ist gleichmäßig stetig.

   (b) Der einseitige Grenzwert $f(a+)$ existiert.

   (c) Es existiert ein $f^* \in C([a, b])$ mit $f^*\Big|_{]a,b]} = f$.

2. Zeigen Sie, daß $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ nicht integrierbar ist.

3. (a) Zeigen Sie für $k, l \in \mathbb{Z}$: $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-ilt} dt = \delta_{kl} := \begin{cases} 1, & \text{falls } k = l \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

   (b) Berechnen Sie für $n, m \in \mathbb{N}$ das Integral $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx$.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Das **Legendresche Polynom n-ter Ordnung** $P_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n].$$

   Beweisen Sie:

   (a) Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ gilt $\int\limits_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0$.

   (b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$.

   (c) P_n besitzt genau n verschiedene Nullstellen im Intervall $]-1, 1[$.
   Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Rolle.

   (d) P_n genügt der sogenannten *Legendreschen Differentialgleichung*

$$(1 - x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x) + n(n + 1) P_n(x) = 0$$

   für alle $x \in \mathbb{R}$.
   Hinweis: Entwickeln Sie den Ausdruck $(x^2 - 1)^n$ in der Definition von P_n nach der binomischen Formel.

Abgabe der Lösungen: Fr, 21.4.2006, 10.00 im Schrein