Übungen zu Analysis II

Blatt 1

1. (a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Regel von l'Hospital den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{2\tan(x)}{x} - \cos(x)\Big),$$

falls dieser existiert.

(b) Seien $f, g\colon]0,\infty[$ differenzierbar mit $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$, falls $x \to \infty$. Außerdem gelte für $x > 0$ stets $g'(x) \neq 0$, und der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiere. Dann gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $K \subset V$ heiße **konvex**, falls für alle $x, y \in K$ und $0 \leq t \leq 1$ stets $tx + (1-t)y \in K$ gilt (geometrische Interpretation?).

(a) Zeigen Sie, daß die konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die Intervalle sind.

(b) Zeigen Sie, daß die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x_j| \leq 1,\ 1 \leq j \leq n\}$ konvex ist.

(c) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, und sei $b \in \mathbb{R}$. Dann ist die Menge $\{t \in \mathbb{R} : f(t) \leq b\}$ konvex.

3. Seien $a, b > 0$. Zeigen Sie, daß die Abbildung $h\colon]-a, a[\to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := -b\,\sqrt{1 - \Big(\frac{x}{a}\Big)^2}$$

konvex ist.

4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und seien $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ k-mal differenzierbar. Beweisen Sie die Leibniz-Regel

$$(fg)^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} f^{(j)}(x) g^{(k-j)}(x).$$

5.* Sei I ein offenes Intervall. Zeigen Sie, daß jede konvexe Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Hinweis: Benutzen Sie die in der Vorlesung Analysis I gezeigte Ungleichung $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$ für $x, z, y \in I$ mit $x < z < y$.

Abgabe der Lösungen: Do, 13.4.2006, 15.00 im Schrein