Lineare Algebra I

WS 2011/12 **Übungen** **Serie 9**

1. Man beweise die Sätze in den §§ G.7.30 - G.7.32 (für § G.7.30 beachte man den Satz in § G.7.27).

2. Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Man zeige:

(i) Für jedes $g \in G$ wird durch $h \mapsto gh$ eine Permutation L_g von G definiert.

(ii) Durch $g \mapsto L_g$ wird ein injektiver Homomorphismus von $(G,\cdot)$ in die Gruppe $(S(M),\circ)$ definiert.

(iii) Mit Hilfe von (i) begründe man, daß in jeder Zeile und jeder Spalte der Verknüpfungstafel einer endlichen Gruppe jedes Element genau einmal vorkommt.

3. Für welche Ringe $(R,+,\cdot)$ ist auch $(R,\cdot,+)$ ein Ring?

4. Sei R ein Ring mit Eins, und sei $r \in R$ *nilpotent*, i.e.: $r^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, daß dann $1-r$ invertierbar ist.

5. Sei $(R,+,\cdot)$ ein KE-Ring, in dem $1+1$ invertierbar ist. Man zeige:

Ist $(R,+,\cdot)$ Nullteiler-frei, so gilt für alle $r,s \in R$: $r^2 = s^2 \iff s = r \vee s = -r$.

Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

6. Sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper. Man beweise die folgenden Bruchrechenregeln:

Für alle $a,c \in K$ und $b,d \in K\setminus\{0\}$ gilt:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$