Lineare Algebra I

WS 2011/12 **Übungen** **Serie 7**

1. Seien L, M Mengen. Man beweise wenigstens eine der folgenden Aussagen:

   (i) $L \approx M \Rightarrow \mathfrak{P}(L) \approx \mathfrak{P}(M)$; (ii) $\mathfrak{P}(M) \approx \{0,1\}^M$.

Hinweis zu (ii): Man gebe eine Umkehrabbildung zu der durch $\chi \mapsto \chi^{-1}(\{1\})$ definierten Abbildung von $\{0,1\}^M$ nach $\mathfrak{P}(M)$ an.

2. Man beweise, daß $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind, indem man zeige, daß durch $(k, \ell) \mapsto 2^{k-1}(2\ell - 1)$ eine Bijektion von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ definiert wird.

3. Für die im ersten Teil von § G.7.2 definierten Verknüpfungen kläre man, ob das Assoziativgesetz oder das Kommutativgesetz gilt und ob ein neutrales Element existiert.

4. Für das in § G.7.2 definierte Vektorprodukt zeige man für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^3$:

   (i) $v \times u = -u \times v$;

   (ii) $u \times (v \times w) = \langle u|w\rangle v - \langle u|v\rangle w$ ("Graßmann-Entwicklung");

   (iii) $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w + v \times (u \times w)$ ("Jacobi-Identität").

5. Für die durch

   (a) $(x,y) \mapsto x+y+1$,

   (b) $(x,y) \mapsto x+2y$,

   (c) $(x,y) \mapsto 3x+3y$,

   (d) $(x,y) \mapsto 4xy$,

   (e) $(x,y) \mapsto y$,

   (f) $(x,y) \mapsto x+y+xy$,

definierten (inneren) Verknüpfungen auf $\mathbb{R}$ kläre man:

(i) ob das Assoziativgesetz gilt,

(ii) ob das Kommutativgesetz gilt,

(iii) ob ein neutrales Element existiert.