Lineare Algebra I

WS 2011/12 **Übungen** **Serie 6**

1. Man zeige, daß die folgenden Mengen gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ sind:

   (a) die Menge aller durch 7 teilbaren natürlichen Zahlen;

   (b) die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen;

   (c) $\mathbb{Z}$;

   (b) die Menge aller Quadratzahlen in $\mathbb{N}$.

2. Man zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{j=1}^{n} j2^j = (n-1)2^{n+1} + 2$.

3. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt: $6n^2 > 3^n$?

4. Sei $m \in \mathbb{N}$. Man zeige:

   Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Paar $(t,r) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit den Eigenschaften: $n = tm + r$ und $r < m$.

Den Existenzbeweis führe man dabei auf zwei Wegen:

   (a) durch vollständige Induktion;

   (b) mit Hilfe des Minimalprinzips, das man für jedes $n \in \mathbb{N}$ auf die Menge $\{n - km ;\ k \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N}$ anwende.

5. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ formalisiere und beweise man die folgende Aussage:

   Unter je n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen findet man genau eine durch n teilbare.