Lineare Algebra I

WS 2011/12 **Übungen** **Serie 5**

1. Sei $\mathfrak{F}$ eine Menge von Abbildungen. Man zeige: $\bigcup\mathfrak{F}$ ist genau dann eine Abbildung, wenn für alle $f, g \in \mathcal{F}$ gilt: $f|_{\mathrm{Def}(g)} = g|_{\mathrm{Def}(f)}$.

2. Man berechne: (i) $(5,2,3,1) \circ (4,4,2,3)$; (ii) $(3,1,4,2) \circ (2,3,4,1)$.

3. Welche der folgenden Relationen ist (a) eine Abbildung, (b) eine injektive Abbildung?

   (i) $\{(1,2), (3,4), (1,3), (4,6), (3,5)\}$;

   (ii) $\{(1,2), (5,4), (2,5), (4,6), (6,7), (3,1)\}$;

   (iii) $\{(1,4), (5,3), (2,5), (4,7), (0,3), (6,4), (3,6)\}$.

4. Seien f, g Relationen mit disjunkten Definitionsbereichen. Man zeige, daß dann die folgenden Bedingungen zueinander äquivalent sind:

   (a) $f \cup g$ ist eine injektive Abbildung,

   (b) f und g sind injektive Abbildungen, und $\mathrm{Bild} f \cap \mathrm{Bild} g = \emptyset$.

5. Seien L, M disjunkte Mengen. Mit Hilfe des Satzes 2 in § G.4.11 beweise man, daß durch $(X, Y) \mapsto X \cup Y$ eine Bijektion f von $\mathfrak{P}(L) \times \mathfrak{P}(M)$ auf $\mathfrak{P}(L \cup M)$ definiert wird. Zu diesem Zweck zeige man, daß durch $T \mapsto (T \cap L, T \cap M)$ eine zu f inverse Abbildung $g : \mathfrak{P}(L \cup M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L) \times \mathfrak{P}(M)$ definiert wird.

6.* Sei M eine Menge, und seien f und g injektive Abbildungen von M in M. Man zeige: Falls $\{x \in M;\ f(x) = x \text{ oder } g(x) = x\} = M$, so gilt: $f \circ g = g \circ f$.
Ist die umgekehrte Implikation auch wahr?