Lineare Algebra I

WS 2011/12 **Übungen** **Serie 15**

1. Man definiere $P, Q, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(K^2)$ durch die Bedingungen:

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Man zeige, daß $\mathfrak{B} := (P, Q, S, \mathrm{Id}_{K^2})$ eine Basis von $E := \mathrm{End}_K(K^2)$ ist.

(ii) Man berechne man die Matrix bezüglich $\mathfrak{B}$ der folgenden linearen Abbildungen:

$$L_T : E \longrightarrow E,\ U \mapsto T \circ U, \quad \text{und} \quad R_T : E \longrightarrow E,\ U \mapsto U \circ T.$$

2. Seien $S : V \longrightarrow W$ und $T : W \longrightarrow V$ lineare Abbildungen. Man zeige:

(i) $\sigma(S \circ T) \setminus \{0\} = \sigma(T \circ S) \setminus \{0\}$.

(ii) Für jedes $\lambda \in \sigma(S \circ T) \setminus \{0\}$ ist $T|_{E_\lambda(S \circ T)}$ ein linearer Isomorphismus auf $E_\lambda(T \circ S)$, dessen Umkehrabbildung gleich $\frac{1}{\lambda} S|_{E_\lambda(T \circ S)}$ ist.

Gilt stets auch die Aussage "$0 \in \sigma(S \circ T) \iff 0 \in \sigma(T \circ S)$" ?

3. Sei $\mathfrak{B}$ ein n-Tupel in V. Man zeige: $\mathfrak{B}$ ist genau dann linear unabhängig in V, wenn für jedes $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$ und jede injektive Abbildung $\tau : \mathbb{N}_{\leq k} \longrightarrow \mathbb{N}_{\leq n}$ das k-Tupel $\mathfrak{B} \circ \tau$ linear unabhängig ist. Man folgere daraus die Bemerkung 1.94.

4. (i) Man verifiziere die Aussagen von Satz 2.2 der Vorlesung.

(ii) Unter der Voraussetzung, daß R kommutativ ist, zeige man für alle $a \in R^{m \times n}$:

$$\langle \underline{({}^t a)}(y), x \rangle = \langle y, \underline{a}(x) \rangle \qquad \text{für alle } x \in R^n \text{ und } y \in R^m.$$

5. (i) Man beweise die Aussagen von Beispiel 2.9 aus der Vorlesung.

(ii) Unter der Voraussetzung, daß R kommutativ ist, berechne man die Determinanten der in Beispiel 2.9.(i) vorkommenden Matrizen.

6. (i) Man beweise die Aussagen von Satz 2.10 aus der Vorlesung.

(ii) Bezeichnet man den Isomorphismus aus Satz 2.10 mit Φ, so berechne man für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für die Matrix $a := \Phi(z)$ die Größen $\det(a)$, $a^{\#}$, $\Phi^{-1}(a^{\#})$ und a^{-1} mit Hilfe von Satz 1.38 und vergleiche das Ergebnis mit der Formel

$$\frac{1}{z} = \overline{z} \cdot |z|^{-2}.$$

7. Sei K ein Körper, und sei $a \in K^{2 \times 2}$. Man zeige: $a \in SL_2(K) \iff \det(a) = 1$.