Lineare Algebra I

WS 2011/12 **Übungen** **Serie 14**

1. Sei $(b_1, \dots, b_n)$ linear unabhängig in V. Für welche $v \in V$ ist $(b_1 + v, \dots, b_n + v)$ linear unabhängig?

2. Für jedes $d \in \mathbb{N}_0$ sei die durch $x \mapsto x^d$ definierte Polynom-Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit P_d bezeichnet. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ zeige man:

(i) Die Menge Pol(n) aller Polynom-Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grade $< n$ ist ein Teilraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(ii) $\mathfrak{B} := (P_{j-1})_{j \in \mathbb{N}_{\leq n}}$ ist eine Basis von Pol(n).

(iii) Durch $P \mapsto P'$ wird ein nilpotenter linearer Endomorphismus T von Pol(n) definiert.

Man errechne $M_{\mathfrak{B}}(T)$.

3. (i) Sei $\mathfrak{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von K^n. Man bestimme $N_{\mathfrak{B}}^{\mathcal{E}_n}$ und stelle damit für jede weitere Basis $\mathfrak{C} = (c_1, \dots, c_n)$ von K^n die Matrix $N_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}}$ dar.

(ii) Man zeige, daß durch $b_1 := (1,2,3)$, $b_2 := (2,3,1)$ und $b_3 := (3,1,2)$ eine Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathbb{R}^3$ definiert wird.

(iii) Für die durch $c_1 := (1,1,0)$, $c_2 := (1,0,1)$ und $c_3 := (0,1,1)$ definierte Basis $\mathfrak{C}$ von $\mathbb{R}^3$ berechne man $N_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}}$ und $N_{\mathfrak{C}}^{\mathfrak{B}}$.

4. (i) Man beweise die Beobachtung 1.79 aus der Vorlesung im Detail.

(ii) Man beweise die in Diskussion 1.92.(i) formulierte Aussage.

5. Sei $T : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung, und sei $m \in \mathbb{N}$. Man zeige:

(i) $\{k^m ; k \in \sigma(T)\} \subset \sigma(T^m)$; (ii) $E_k(T) \subset E_{k^m}(T^m)$ für alle $k \in \sigma(T)$.

(iii) Ist T diagonalisierbar, so gilt in (i) und - falls die Abbildung $\sigma(T) \longrightarrow K$, $k \mapsto k^m$, injektiv ist - auch in (ii) das Gleichheitszeichen.

6. Man zeige, daß durch $x \mapsto (6x_1 - 2x_2, 3x_2 - 2x_1)$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus T von $\mathbb{R}^2$ definiert wird, berechne $\sigma(T)$ und die Eigenräume von T und verifiziere, daß diese bezüglich des Standard-Skalarproduktes von $\mathbb{R}^2$ zueinander orthogonal stehen. Ferner kläre man, für welche $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ der Endomorphismus T eine n-te Wurzel S_n in $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ besitzt, und bestimme gegebenenfalls $M(S_n)$.