# Lineare Algebra I

**WS 2011/12** **Übungen** **Serie 13**

1. Seien $v_1, v_2 \in K^2$. $a \in K^{2\times 2}$ sei definiert durch die Bedingung: $S_j(a) = v_j$ für alle $j \in \{1,2\}$. Man verifiziere die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:

   (a) $(v_1, v_2)$ ist linear abhängig;

   (b) $v_1 \in Kv_2$ oder $v_2 \in Kv_1$;

   (c) $\det(a) = 0$.

2. Welche der folgenden Tupel in $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ sind Erzeugendensysteme, linear unabhängig, Basen?

   (i) $((1,-1,0),(1,0,-1))$; (ii) $((-1,1,0),(2,0,1),(0,-2,-2))$;

   (iii) $((1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1))$; (iv) $((1,1,2,2),(2,2,1,1))$.

3.* Sei g die Folge der geraden Zahlen aus $\mathbb{N}$, u die Folge der ungeraden Zahlen aus $\mathbb{N}$, q die Folge der Quadratzahlen aus $\mathbb{N}$ und $q_u$ die Folge der ungeraden Quadratzahlen aus $\mathbb{N}$. Man teste das Quadrupel $(g, u, q, q_u)$ auf lineare Unabhängigkeit im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4. Man zeige: $U := \{x \in \mathbb{R}^3;\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0\}$ ist ein Teilraum von $\mathbb{R}^3$. Man gebe eine Basis $\mathfrak{B}$ von U an. Ferner zeige man, daß durch

$$x \mapsto \left(2x_1 + x_2,\ 3x_1 - x_2,\ \frac{1}{5}x_2 - 2x_3\right)$$

eine lineare Abbildung $T: U \longrightarrow U$ definiert wird, und bestimme die Matrix $M_{\mathfrak{B}}(T)$ bezüglich der oben angegebenen Basis $\mathfrak{B}$ von U.

5. Man zeige, daß genau eine lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ mit den Eigenschaften

$$T(1,1,0) = (1,-2,0,4), \quad T(1,-1,0) = (1,2,2,2) \quad \text{und} \quad T(1,0,1) = (0,1,-1,0)$$

existiert, und berechne für dieses T die Bilder der Vektoren $(0,1,3)$ und $(-2,2,-3)$. Ist T injektiv/surjektiv? Wie sieht die Matrix von T bezüglich der Standard-Basen aus?