Lineare Algebra I

WS 2011/12 **Übungen** **Serie 12**

1. Sei $s \in \{1,-1\}$. Man zeige, daß durch $(x,y) \mapsto (2x+3y, 3x+4sy)$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $T_s : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definiert wird, die den $\mathbb{Z}$-Teilmodul $\mathbb{Z}^2$ von $\mathbb{Q}^2$ in sich abbildet. Man gebe $M(T_s)$ an, berechne $\det M(T_s)$ und bestimme $\mathrm{Kern}(T_s)$ und $\mathrm{Bild}(T_s)$. Das Gleiche führe man für die $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $U_s := (T_s|_{\mathbb{Z}^2})$ durch. Für den Fall, daß $B := \mathrm{Bild}(U_s)$ ungleich $\mathbb{Z}^2$ ist, bestimme man für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Mengen ${}_kB := \{\ell \in \mathbb{Z}\, ;\ (k,\ell) \in B\}$ und $B_k := \{\ell \in \mathbb{Z}\, ;\ (\ell,k) \in B\}$.

Die erhaltenen Ergebnisse interpretiere man als Aussagen über lineare Gleichungssysteme.

2. Sei R einer der beiden Ringe $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. Man zeige, daß durch

$$(x,y) \mapsto (2x-3y, 6y-4x)$$

eine R-lineare Abbildung $T : R^2 \longrightarrow R^2$ definiert wird, und bestimme $\mathrm{Kern}(T)$ und $\mathrm{Bild}(T)$.

3. R sei ein KE-Ring. Sei $a \in R^{2\times 2}$. Man setze $d := \det(a)$ und zeige:

(i) $dR^2 := \{dz\, ;\ z \in R^2\} \subset \mathrm{Bild}(\underline{a}) \subset \{y \in R^2;\ \underline{a^{\#}}(y) \in dR^2\}$.

(ii) Ist d ungleich 0 und kein Nullteiler von R, so steht anstelle des rechten Inklusionszeichens in (i) das Gleichheitszeichen. Steht dann auch anstelle des linken Inklusionszeichens stets das Gleichheitszeichen (beispielsweise für $R = \mathbb{Z}$)?

4. R sei ein *Integritätsbereich*, i.e.: ein Nullteiler-freier KE-Ring. Es gelte: $-1 \neq 1$. Für die Matrix

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zeige man, daß die Abbildung $T := \underline{a}$ *involutorisch*, i.e.: selbstinvers ist, kläre, für welche $\lambda \in R$ die Abbildung $\lambda \mathrm{Id}_{R^2} - T$ nicht injektiv ist, und bestimme für diese λ ihren Kern.

5. Man setze $u := (0,1)$, $v := (1,1)$, $w := (2,0)$. Welche linearen Abbildungen $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ haben die folgende Eigenschaft: $T(\{u,v,w\}) = \{u,v,w\}$?