Lineare Algebra I

WS 2011/12 **Übungen** **Serie 11**

1. Für die Matrizen

$$a := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gebe man eine formale Definition an, notiere $Z_2(a)$, $S_3(a)$, $Z_3(b)$, $S_2(b)$ und berechne die Produkte ab und ba.

2. Man beweise die Formeln (1.3) und den Satz 1.15.A aus der Vorlesung und begründe, warum $\underline{a}$ im allgemeinen nicht R-linkslinear ist.

3. Man führe den Beweis von Satz 1.17 aus der Vorlesung durch, gebe einen direkten Beweis von Satz 1.22.(i) an und vervollständige den Beweis von Satz 1.22.(ii).

4. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Man zeige, daß durch $a \mapsto (Z_i(a))_{i \in \mathbb{N}_{\leq m}}$ ein Isomorphismus des R-Moduls $R^{m \times n}$ auf den R-Modul $(R^n)^m$ definiert wird.

Eine entsprechende Aussage formuliere und beweise man für die Spalten.

5. Sei $a \in R^{n \times n}$. Man zeige: Ist a invertierbar, so ist keine Zeile und keine Spalte von a gleich 0. Gilt auch die Umkehrung?

6. R sei ein KE-Ring. Man beweise:

(i) Durch $a \mapsto \mathit{det}(a) := a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ wird ein Homomorphismus *det* von der multiplikativen Halbgruppe des Rings $R^{2\times 2}$ in die multiplikative Halbgruppe von R definiert.

(ii) Für jedes $a \in R^{2\times 2}$ ist $a^{\#} := \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$ eine Matrix aus $R^{2\times 2}$ mit der Eigenschaft: $a a^{\#} = \det(a)\, I_2 = a^{\#} a$.

Welche dieser Aussagen bleiben war, wenn R nicht als kommutativ vorausgesetzt ist?