Lineare Algebra I

WS 2011/12 **Übungen** **Serie 10**

1. Sei $(R,+,\cdot)$ ein Ring mit Eins $1_R \neq 0_R$. Man zeige:

(i) Für jedes $g \in G(R)$ wird durch $r \mapsto grg^{-1}$ ein Ring-Isomorphismus $\varkappa_g : R \longrightarrow R$ definiert, der 1_R auf 1_R und $G(R)$ auf $G(R)$ abbildet.

(ii) Durch $g \mapsto \varkappa_g$ wird ein Homomorphismus von $(G(R),\cdot)$ nach $(S(R),\circ)$ definiert; man beschreibe seinen Kern.

2. (Pflichtaufgabe) Man beweise die Aussagen in den §§ G.8.3, G.9.4, G.9.11 und G.9.27. Dabei mache man möglichst häufig von dem Satz in § G.7.23 Gebrauch.

3. Sei $(V,+)$ eine kommutative Gruppe. Man zeige:

(i) Die Menge *End(V)* aller Homomorphismen von $(V,+)$ in sich wird mit der gemäß § G.7.23 definierten punktweisen Addition und der Hintereinanderausführung als Multiplikation zu einem Ring mit Eins.

(ii) Sei R ein Ring mit einer von 0 verschiedenen Eins, und sei $\mu : R \times V \longrightarrow V$ eine Abbildung. Dann ist das Tripel $(V,+,\mu)$ genau dann ein R-Modul, wenn durch

$$r \mapsto L_r := \mu(r,\cdot) \qquad \text{(zur Notation siehe § G.4.12)}$$

ein unitaler Ring-Homomorphismus $\tilde{\mu} : R \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ definiert wird.

4. Sei V ein K-Vektorraum, und seien U,Y,Z Teilräume. Man zeige:

$$U \subset X \cup Y \;\Rightarrow\; U \subset X \;\vee\; U \subset Y.$$

Wann ist $X \cup Y$ ein Teilraum von V?

5. Durch welche der folgenden Zuordnungen wird eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$ definiert:

(a) $(x,y) \mapsto (x+2y, 4x-5y, 6x+7)$;

(b) $(x,y) \mapsto (x+2y^2, 4x-5y, 6x^3)$;

(c) $(x,y) \mapsto (x-2y, 4x+5y, 6x)$?

6. Man beweise die Sätze in den §§ G.9.20, G.9.31, G.9.32 und G.9.34. Dabei mache weitestgehend von den entsprechenden Sätzen aus § G.7 Gebrauch.

7. Welche der folgenden Teilmengen ist ein Teilraum von $\mathbb{R}^3$:

(a) $\{x \in \mathbb{R}^3;\ 2x_1 + 3x_2 = 4x_3\}$;

(b) $\{x \in \mathbb{R}^3;\ 2x_1 - 3x_2 = 4x_3 - 5\}$;

(c) $\{x \in \mathbb{R}^3;\ 2x_1 - 3x_2^2 = 4x_3\}$;

(d) $\{(r+4s, 3s, 2r-s);\ r,s \in \mathbb{R}\}$;

(e) $\{(r+4s, -3s+4, 5r-s);\ r,s \in \mathbb{R}\}$;

(f) $\{(r+4s^2, 3s, 2r-s);\ r,s \in \mathbb{R}\}$?