Lineare Algebra II

SS 2012 **Übungen** **Serie 9**

1. Man führe die Beweise der Sätze 4.136 und 4.137 sowie der Bemerkung 4.139 aus der Vorlesung durch.

2. Für jede Matrix $a \in R^{n \times n}$ mit der Eigenschaft "$S_j(a) = e_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}_{<n}$" beweise man:
$$\chi_a = X^n - \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} X^{i-1}.$$
Man folgere daraus, daß jedes normierte Polynom vom Grade n als das charakteristische Polynom einer $n \times n$-Matrix vorkommt.

3.* Für den Fall "$n = 3$" verifiziere man die Aussage des Satzes 4.153 des Skriptes durch direktes Nachrechnen mit Hilfe der Sarrus-Regel.

4. (Pflichtaufgabe) Für die reelle Matrix $a := \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ bestimme man die Menge der Eigenwerte, gebe die Eigenräume an und zeige, daß diese bezüglich des Standard-Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^2$ orthogonal zueinander stehen.

5. (Pflichtaufgabe) Man führe die Beweise der Gleichungen (5.57) - (5.58)' in Satz 5.130 und Bemerkung 5.139 der Vorlesung im Detail durch.

6. Sei V ein Prä-Hilbert-Raum über $\mathbb{K}$, und seien $v, w \in \dot{V}$. Man zeige:

(i) $\|v + w\| = \|v\| + \|w\| \iff \exists\, r \in \mathbb{R}_{>0}: v = rw$.

(ii) $v \perp w \iff \big(\forall \lambda \in \mathbb{K}: \|v + \lambda w\| = \|v - \lambda w\|\big)$.

(iii) Im Falle "$\mathbb{K} = \mathbb{R}$" gilt: $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \iff v \perp w \iff \|v + w\| = \|v - w\|$.