Lineare Algebra II

SS 2012 **Übungen** **Serie 8**

1. Für jedes $a \in R^{n \times n}$ zeige man: $\det\big((-1)^{i+j} a_{i,j}\big)_{(i,j) \in \mathbb{N}_{\le n} \times \mathbb{N}_{\le n}} = \det(a)$.

   Bleibt dies richtig, wenn man für vorgegebene $\rho, \tau \in S_n$ den Faktor $(-1)^{i+j}$ durch $(-1)^{\rho(i)+\tau(j)}$ ersetzt?

2. Man berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$a := \begin{pmatrix} 2 & -5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad d := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (i) Für beliebige $a, b, c, d \in R$ berechne man die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

(ii) Ein entsprechendes Resultat formuliere und beweise man für $n \times n$-Matrizen.

4. Man versuche das folgende lineare Gleichungssystem mit der Cramerschen Regel zu lösen: $x_1 - 2x_2 = 3$, $x_1 + x_2 + x_3 = -2$, $3x_2 + 2x_3 = 1$.

5. Man berechne die Adjunkte der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, kläre, ob sie invertierbar ist, und berechne gegebenenfalls ihre Inverse nach Satz 4.106 der Vorlesung.

6*. Seien $a \in R^{n \times n}$ und $x, y \in R^n$. Man zeige:

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & a_{1,n} & x_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdot & \cdot & a_{n,n} & x_n \\ y_1 & & & y_n & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j+1} \det(a_{\rho_i, \rho_j})\, x_i y_j .$$