Lineare Algebra II

SS 2012 **Übungen** **Serie 7**

1. Man beweise die Sätze 4.4 und 4.5 aus dem Vorlesungsskript. Man folgere:

$$\mathrm{Spur}(gcg^{-1}) = \mathrm{Spur}(c) \qquad \text{für alle } c \in R^{n\times n} \text{ und } g \in GL_n(R).$$

2. Sei V ein K-Vektorraum, und seien $\mu_1, \mu_2 \in V^*$. Man zeige: Durch

$$(v_1, v_2) \mapsto \det(\mu_i(v_j))_{1\le i,j\le 2}$$

wird eine alternierende bilineare Abbildung $\mu_1 \wedge \mu_2 : V \times V \longrightarrow K$ definiert, die genau dann identisch 0 ist, wenn (μ_1, μ_2) in V^* linear abhängig ist.

3. Man führe die Beweise der Sätze 4.66 und 4.72 im Detail durch.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_{<n}$ zeige man, daß durch $\sigma \mapsto (\sigma|_{\mathbb{N}_{\le \ell}}, \sigma(\ell+1))$ eine Bijektion von $A_{\ell+1,n}$ auf $A_{\ell,n} \times \mathbb{N}_{\le n}$ definiert wird, und führe damit und mit Hilfe der Umordnungssätze aus § G.7.c den Induktionsbeweis von Lemma 4.67 durch.

5. Sei $a \in R^{n\times n}$ antisymmetrisch (Definition 2.3). Es gelte die Bedingung (4.34). Man zeige: Ist n ungerade, so ist $\det(a) = 0$.

6. (i) Man beweise die Bemerkung 4.77 der Vorlesung.

   (ii) Sei X eine nicht-leere Menge. Sei $a \in (R^X)^{n\times n}$. Man zeige:

$$(\det(a))(x) = \det(a_{i,j}(x))_{1\le i,j\le n} \qquad \text{für alle } x \in X.$$