Lineare Algebra II

SS 2012 **Übungen** **Serie 6**

1. Sei $\mathcal{L}$ eine nicht-leere Teilmenge von V, und sei $z \in \dot{V} \setminus \mathcal{L}$. Man zeige: Ist für alle $v \in \mathcal{L}$ die Menge $(\mathcal{L} \setminus \{v\}) \cup \{z\}$ linear abhängig, so ist auch $\mathcal{L}$ linear abhängig.

2. (i) Man beweise den Satz 3.79 der Vorlesung.

(ii) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und sei $T \in \mathrm{End}_K(V)$. Man zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{(I)} \quad \dim \mathrm{Bild}(T) = \dim \mathrm{Bild}(T^n) + \sum_{j=1}^{n-1} \dim(\mathrm{Bild}(T^j) \cap \mathrm{Kern}(T)),$$

$$\text{(II)} \quad \dim \mathrm{Kern}(T^n) = \dim \mathrm{Kern}(T) + \sum_{j=1}^{n-1} \dim(\mathrm{Bild}(T^j) \cap \mathrm{Kern}(T)).$$

3. (Pflichtaufgabe) Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume, und sei $T: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Man zeige, daß für jede geordnete Basis $\mathfrak{B}$ von V und jede geordnete Basis $\mathfrak{C}$ von W gilt: $\mathrm{Rang}(T) = \mathrm{Rang}(M_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{C}}(T))$.

4. (Pflichtaufgabe) Man bestimme die Dimension des von den Vektoren

$v_1 := (1,2,-4,1,-3)$,

$v_2 := (2,1,3,-2,1)$,

$v_3 := (-1,4,-18,7,-11)$,

$v_4 := (8,7,1,-4,-6)$

aufgespannten Teilraumes U von $\mathbb{R}^5$, wähle aus ihnen mit der Methode von Satz 3.91.(iii) eine Basis von U aus und gewinne mit der Methode von Satz 3.91.(ii) eine Basis von U, die aus Vektoren besteht, deren Komponenten möglichst viele Nullen aufweisen.

5. (Pflichtaufgabe) Für die Permutationen (3,4,2,1) und (3,6,2,7,1,5,4) bestimme man die Menge der Fehlstände sowie das Vorzeichen und stelle sie als Hintereinanderausführung (einfacher) Transpositionen dar.