Lineare Algebra II

SS 2012 **Übungen** **Serie 4**

1. Seien W_1, W_2 zueinander komplementäre Teilräume von W. Man zeige, daß dann $\mathrm{Hom}_K(V, W_1)$ und $\mathrm{Hom}_K(V, W_2)$ zueinander komplementäre Teilräume von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ sind, und beschreibe die durch sie definierten Projektoren mit Hilfe der durch W_1, W_2 definierten Projektoren.

2. (Pflichtaufgabe) Sei I ein Menge, und sei V ein K-Vektorraum. Man verifiziere die Bemerkung 3.23 der Vorlesung, zeige, daß durch $v \mapsto \sum_{i \in I} v_i$ eine lineare Abbildung von $V^{(I)}$ nach V definiert wird, und beweise damit den Satz 3.38.

3. (Pflichtaufgabe) Mit Hilfe von Bemerkung 3.45 und Lemma 3.44 formuliere man den Satz 1.93 um in eine Aussage, in der die Menge $\mathbb{N}_{\leq n}$ als Indexmenge ersetzt ist durch eine beliebige Menge, bzw. eine beliebige Teilmenge von $\sigma(T)$.

4. Man beweise die Aussage von Beispiel 3.43 aus der Vorlesung.

5. Sei L ein Teilintervall von $\mathbb{R}$ positiver Länge. Man zeige:

(i) Bezeichnet man für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die durch $t \mapsto t^n$ definierte Funktion von L nach $\mathbb{R}$ mit p_n, so ist die Familie $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ linear unabhängig im $\mathbb{R}$-Vektorraum $C^\infty(L, \mathbb{R})$.

(ii) Es gelte: $L \subset \mathbb{R}_{>0}$. Bezeichnet man für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ die durch $t \mapsto t^\alpha$ definierte Funktion von L nach $\mathbb{R}$ mit p_α, so ist die Familie $(p_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{C}}$ linear unabhängig im $\mathbb{C}$-Vektorraum $C^\infty(I, \mathbb{C})$.