Lineare Algebra II

SS 2012 **Übungen** **Serie 2**

1. Man zeige, daß sich jede Zeilenvertauschung einer Matrix mit Hilfe endlich vieler Zeilenscherungen darstellen läßt.

2. Sei $a \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ definiert durch

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Man zeige, daß a in $\mathbb{Q}^{4\times 4}$ (aber nicht in $\mathbb{Z}^{4\times 4}$) invertierbar ist, und berechne a^{-1} mit dem Rekursionsverfahren aus dem Beweis von Satz 2.22.

(ii) Man bringe a in starke Zeilenstufenform und berechne dabei a^{-1} nach dem Verfahren aus Satz 2.68.

(iii) Man vergesse nicht, von der jeweils errechneten Matrix direkt nachzuprüfen, daß sie zu a invers ist.

3. (Pflichtaufgabe) Mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen bringe man die folgenden Matrizen 1. in Zeilen-Stufenform, 2. in starke Zeilen-Stufenform und bestimme ihren Rang:

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & -2 & 14 & -6 \\ 5 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -18 & 7 & -11 \\ 8 & 7 & 1 & -4 & -6 \end{pmatrix}$.

4. Für jedes $r \in \mathbb{R}$ bestimme man den Rang der folgenden Matrix aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2r \\ -1 & -1-r & 9-7r \\ -2 & -3 & -3r \end{pmatrix},$$

kläre, unter welchen Voraussetzungen an r sie invertierbar ist, und gebe dann ihre Inverse an.

5.* Sei $d \in \dot{K}$ derart, daß es $r, s \in \dot{K}$ so gibt, daß $d = rsr^{-1}s^{-1}$. Man zeige, daß sich dann die 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ allein durch Zeilenscherungen in die Einheitsmatrix I_2 überführen läßt.