Lineare Algebra II

SS 2012 **Übungen** **Serie 11**

1. Sei R ein KE-Ring. Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in R^n$ zeige man:

$$\det(\langle u_i, v_k \rangle)_{(i,k)\in \mathbb{N}_{\le n}\times \mathbb{N}_{\le n}} = \det_{\mathcal{E}}(u_1,\ldots,u_n)\det_{\mathcal{E}}(v_1,\ldots,v_n).$$

2. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und sei $T \in \operatorname{End}_K(V)$ diagonalisierbar. Man formuliere und beweise eine Präzisierung der Aussage:

Die Determinante von T ist gleich dem Produkt der Eigenwerte von T.

3. Sei V ein Prä-Hilbert-Raum, und sei J eine nicht-leere endliche Menge. Mit der Abkürzung $S := \{-1,1\}^J$ leite man für alle $v \in V^J$ die folgende Formel her:

$$\sum_{j\in J} \|v_j\|^2 = 2^{-|J|} \sum_{s\in S} \Big\|\sum_{j\in J} s_j v_j\Big\|^2$$

und folgere daraus: Es gibt $s,t \in S$ mit den Eigenschaften

$$\Big\|\sum_{j\in J} s_j v_j\Big\|^2 \le \sum_{j\in J} \|v_j\|^2 \le \Big\|\sum_{j\in J} t_j v_j\Big\|^2.$$

4. Seien $u := (1,1,-2)$, $v := (2,-1,1)$, $w := (1,2,1)$. Im Prä-Hilbert-Raum $\mathbb{R}^3$ orthonormalisiere man mit dem Gram-Schmidt-Verfahren die Tripel:

(i) (u,v,w); (ii) (v,w,u).

5. Sei V ein endlich-dimensionaler Prä-Hilbert-Raum. Sei $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Man zeige:
   - (i) $\det T^* = \overline{\det T}$.
   - (ii) Ist T selbstadjungiert, so ist $\det T$ aus $\mathbb{R}$.
   - (iii) Ist T eine Isometrie, so gilt: $|\det T| = 1$, und $\sigma(T) \subset S^1 := \{ z \in \mathbb{C};\ |z| = 1 \}$.
   - (iv) Was kann man über $\det T$ und $\sigma(T)$ sagen, wenn S schiefadjungiert ist?

6. Man zeige, daß durch

$$x \mapsto \left(\tfrac{11}{6}x_1 - \tfrac{1}{6}x_2 - \tfrac{2}{3}x_3,\ -\tfrac{1}{6}x_1 + \tfrac{11}{6}x_2 - \tfrac{2}{3}x_3,\ -\tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{7}{3}x_3\right)$$

ein selbstadjungierter Endomorphismus $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert wird, berechne die Eigenwerte von T und gebe eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren von T besteht. Ist T positiv definit? Wenn ja, gebe man eine Quadratwurzel von T an.

7. Sei V ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ohne Eigen-

werte. Man zeige, daß dann ein $P \in \mathbb{R}[X]$ vom Grade 1 so existiert, daß für $J := P(T)$ gilt: $J \circ J = -\mathrm{Id}_V$, und $T \circ J = J \circ T$. Man folgere daraus, daß durch

$$(x+iy, v) \mapsto xv + yJ(v)$$

eine Skalaren-Multiplikation $\mathbb{C} \times V \longrightarrow V$ definiert wird, durch die V die Struktur eines $\mathbb{C}$-Vektorraumes erhält, bezüglich der die Abbildung T $\mathbb{C}$-linear ist.

8. Sei V ein K-Vektorraum, sei $T \in \mathrm{End}_K(V)$, und sei $P \in K[X]$. Man zeige:

(i) $\{P(k)\,;\, k \in \sigma(T)\} \subset \sigma(P(T))$; (ii) $\forall k \in \sigma(T)$: $E_k(T) \subset E_{P(k)}(P(T))$.

(iii) Ist V endlich-dimensional und T diagonalisierbar, so steht in (i) und – falls die Abbildung $\sigma(T) \longrightarrow K$, $k \mapsto P(k)$, injektiv ist – auch in (ii) das Gleichheitszeichen.

9. Für den durch $(x,y,z) \mapsto (\frac{5}{2}x - y - \frac{z}{2}, -\frac{x}{2} + 2y - \frac{z}{2}, \frac{x}{2} - y + \frac{3}{2}z)$ definierten Endomorphismus $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ berechne man die Eigenwerte und die Eigenräume.

10. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Gibt es ein $T \in \mathrm{End}_k(V)$ und einen T-invarianten Teilraum von V ohne T-invariantes Komplement?

11. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und sei $T \in \mathrm{End}_k(V)$. Man zeige:

(i) $\exists\, m \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N}_{\geq m}$: $\mathrm{Kern}\, T^k = \mathrm{Kern}\, T^{k+1}$, und $\mathrm{Bild}\, T^k = \mathrm{Bild}\, T^{k+1}$.

(ii) $m := \min\{k \in \mathbb{N}\,;\, \mathrm{Kern}\, T^k = \mathrm{Kern}\, T^{k+1}\} = \min\{k \in \mathbb{N}\,;\, \mathrm{Bild}\, T^k = \mathrm{Bild}\, T^{k+1}\}$.

(iii) Für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq m}$ gilt: $\mathrm{Kern}\, T^k = \mathrm{Kern}\, T^m$ $\mathrm{Bild}\, T^k = \mathrm{Bild}\, T^m$.

(iv) $V = \mathrm{Kern}(T^m) \oplus \mathrm{Bild}(T^m)$.

12. Unter der GV 6.1 gelte die Voraussetzung von Satz 6.4. Man zeige:

(i) Es gibt einen diagonalisierbaren Endomorphismus $D \in \mathrm{End}_K(V)$ und einen nilpotenten Endomorphismus $N \in \mathrm{End}_K(V)$ mit den Eigenschaften:

(a) $T = D + N$, (b) $T \circ N = N \circ T$.

(ii) Ist T ein Isomorphismus, so gibt es einen diagonalisierbaren Endomorphismus $D \in \mathrm{End}_K(V)$ und ein $U \in \mathrm{End}_K(V)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $T = DU$, (b) $U - \mathrm{Id}_V$ ist nilpotent, (c) $T \circ U = U \circ T$.

13. Man beweise den Satz 6.42 aus dem Skript.

14. Man führe den Beweis von Lemma 6.70 aus dem Skript durch.