Lineare Algebra II

SS 2012 | **Übungen** | **Serie 10**

1. Man beweise die Aussagen der Beispiele 5.138 und 5.158 der Vorlesung.

2. Man beweise den Satz 5.160 der Vorlesung.

3. (Pflichtaufgabe) Seien $r,s \in \mathbb{R}$. Für $U := \{x \in \mathbb{R}^4;\ rx_1 + x_2 + x_3 = 0 = sx_2 + x_4\}$ berechne man $U^{\perp}$ bezüglich des Standard-Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^4$ und gebe die orthogonale Projektion π_U auf U und ihre Matrix $M(\pi_U)$ bezüglich der Standard-Basis von $\mathbb{R}^4$ an. Unter welchen Voraussetzungen an r,s gilt die Beziehung $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^{\perp}$?. Welche Dimension haben $U, U^{\perp}$?

4. Sei $(V, \langle\cdot|\cdot\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum, sei U ein endlich-dimensionaler Teilraum von V, und sei P ein Projektor von V auf U. Mit Hilfe von (5.72.b) zeige man:
$$P = \pi_U \iff \forall v,w \in V:\ \langle P(v)|w\rangle = \langle v|P(w)\rangle.$$

5. Sei $(V, \langle\cdot|\cdot\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum, und seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Man zeige: Auf dem Raum $C([a,b],V)$ aller stetigen Funktionen von $[a,b]$ nach V wird durch
$$(f,g) \mapsto \int_a^b \langle f(t)|g(t)\rangle\, dt$$
ein Skalarprodukt definiert.

6.* $W := C([-1,1], \mathbb{K})$ sei mit dem gemäß Aufgabe 5 durch $(f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\,dt$ definierten Skalarprodukt versehen. Man zeige, daß
$$U := \left\{ f \in W;\ \int_{-1}^{0} f(t)\,dt = 0 \right\}$$
ein Teilraum von W der Kodimension 1 ist, und berechne $W^{\perp}$.

7. Sei U ein Teilraum eines Prä-Hilbert-Raumes V, und sei W ein Teilraum von $U + U^{\perp}$. Man zeige:
$$\text{(i)}\ \pi_U \circ \pi_W = \pi_W \iff W \subset U. \qquad \text{(ii)}\ \pi_U \circ \pi_W = 0 \iff W \subset U^{\perp}.$$