Lineare Algebra II

SS 2012 **Übungen** **Serie 1**

1. Sei K ein Körper. (i) Man bestimme die Mengen

$$W := \{ a \in K^{2\times 2};\ a^2 = I_2 \} \quad \text{und} \quad W_0 := W \cap \Delta_0(K^{2\times 2}).$$

(ii) Sei $a \in \Delta_0(K^{2\times 2})$. Man gebe notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß die Matrix a eine Quadratwurzel in (α) $K^{2\times 2}$, (β) $\Delta_0(K^{2\times 2})$ besitzt.

(iii) Für welche Matrizen $a \in K^{2\times 2}$ (bzw. $\Delta_0(K^{2\times 2})$) gilt: $a^2 = a$?

2. Sei R ein KE-Ring. Man zeige:

(i) Für jede Teilmenge M von $R^{n\times n}$ ist

$$M^c := \{ a \in R^{n\times n};\ \forall\, m \in M:\ am = ma \}$$

eine unitale Teilalgebra von $R^{n\times n}$.

(ii) $(R^{n\times n})^c = RI_n = \{ E^{1,q};\ q \in \mathbb{N}_{\leq n} \}^c$.

(iii) Für jedes injektive n-Tupel $\lambda \in K^n$ gilt: $\{\mathrm{diag}(\lambda)\}^c = \{ \mathrm{diag}(x);\ x \in K^n \}$.

3. Für die Matrix $a := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ und die Inhomogenität $y := (-1, -2, -3)$ bestimme man die Menge aller Lösungen $x \in \mathbb{R}^5$ des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^{5} a_{i,j} x_j = y_i \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}_{\leq 3}.$$