Übungen zu

SS 2003 **Lineare Algebra II** **Serie 9**

Definition. Sei R ein (nicht notwendig kommutativer) Ring mit Eins. Eine Teilmenge $\mathfrak{J}$ von R heißt *Rechtsideal von R*, wenn $0 \in \mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}$ gegen + abgeschlossen ist und $\mathfrak{J}R \subset \mathfrak{J}$ gilt.

1. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Man zeige:

(a) Für jeden Teilraum T von V ist $L(V,T)$ ein Rechtsideal von $L(V)$.

(b) Für alle Teilräume S,T von V gilt: $L(V,S) + L(V,T) = L(V,S+T)$.

2. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Für jedes $\alpha \in L(V)$ notieren wir die Menge $\{\alpha \circ \varphi \,;\, \varphi \in L(V)\}$ mit $\alpha \circ L(V)$. Man zeige:

(a) Für jedes $\alpha \in L(V)$ gilt: $\alpha \circ L(V) = L(V, \mathrm{Bild}\,\alpha)$.

(b) Für jede Teilmenge $\mathfrak{J}$ von $L(V)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $\mathfrak{J}$ ist ein Rechtsideal von $L(V)$.

(ii) $\mathfrak{J} = L(V,T)$ für einen Teilraum T von V.

(iii) $\mathfrak{J} = \alpha \circ L(V)$ für ein $\alpha \in L(V)$.

3. Man zeige für beliebige $f,g,h \in K[x]$:

Falls f,g teilerfremd sind, gilt: $f,g \mid h \Rightarrow f \cdot g \mid h$.

4. Man zeige für alle $t,f,g \in K[x]\setminus\{0\}$: $t \mid f \cdot g \Rightarrow t \mid \mathrm{ggT}(t,f) \cdot \mathrm{ggT}(t,g)$.