Übungen zu

SS 2003 **Lineare Algebra II** **Serie 8**

Sei K ein Körper.

Ein Polynom $f \in K[x]$ heißt *irreduzibel*, wenn es nicht-konstant ist und seine einzigen Teiler die Polynome cx^0 und cf mit $c \in K\setminus\{0\}$ sind.

1. (a) Man zeige für jedes $f \in K[x]$ mit $\operatorname{Grad} f > 1$:

$$f \text{ ist irreduzibel } \Rightarrow f \text{ hat keine Nullstelle in } K.$$

(b) Für welche $f \in K[x]$ gilt auch die Umkehrung von (a)?

2. Sei K endlich. Man zeige: Es gibt ein $a \in K$ derart, daß das Polynom $x^3 - x + a$ irreduzibel ist.

3. Sei K endlich. Man bestimme (in Abhängigkeit von $|K|$) die Anzahl der normierten, irreduziblen Polynome aus $K[x]$ (a) vom Grade 2, (b) vom Grade 3.

4. Sei L ein Teilkörper von K, und seien $f, g \in L[x]$. Man zeige:

$$f \mid g \text{ (in } K[x]) \Rightarrow f \mid g \text{ (in } L[x]).$$

5. Bekanntlich besagt der *Fundamentalsatz der Algebra*, daß jedes nicht-konstante Polynom aus $\mathbb{C}[x]$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat. Hieraus ergibt sich sofort, daß die irreduziblen Polynome aus $\mathbb{C}[x]$ genau die vom Grade 1 sind.

Man zeige, daß jedes irreduzible Polynom aus $\mathbb{R}[x]$ vom Grade 1 oder 2 ist. Dazu beweise man für jedes $f \in \mathbb{R}[x]$ und jedes $u \in \mathbb{C}$: $f(u) = 0 \Rightarrow f(\overline{u}) = 0$.