Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

1. Sei $\varphi \in L(K^n)$ derart, daß $M(\varphi)$ eine untere Dreiecksmatrix ist, die auf der Diagonalen nur Nullen hat. Für jedes $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ sei $T_j := \langle e_j, e_{j+1}, \dots, e_n \rangle$, und sei $T_{n+1} := \{0\}$. Für alle $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ zeige man: $\varphi(T_j) \subset T_{j+1}$, und folgere daraus die Bemerkung 9.9 der Vorlesung, daß φ nilpotent ist.

2. (a) Man zeige, daß jede Matrix aus $K^{3\times 3}$ ähnlich ist zu einer Matrix von einem der folgenden drei Typen:

   1. Streckungsmatrix, 2. Begleitmatrix, 3. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$.

(b) Seien $r, s \in K$ mit $r \neq s$.

Zu welchem der in (a) genannten Matrixtypen ist $\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$ ähnlich?

Für jedes Polynom $f \in K[x]$ sei die zugehörige Polynom-Funktion mit $\hat{f}$ bezeichnet.

3. Man zeige: Ist K endlich, so ist jede Funktion aus K^K eine Polynom-Funktion. Gilt auch die Umkehrung?

4. Man zeige: K ist genau dann unendlich, wenn die Abbildung

$$K[x] \longrightarrow K^K, \quad f \mapsto \hat{f},$$

injektiv ist.