Übungen zu

SS 2003 **Lineare Algebra II** **Serie 6**

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.

1. Man zeige für alle Teilräume Γ, Δ von V^*:

   (a) $\Gamma \subset \Delta \Rightarrow \operatorname{Kern}\Gamma \supset \operatorname{Kern}\Delta$.

   (b) $\operatorname{Kern}(\Gamma + \Delta) = \operatorname{Kern}\Gamma \cap \operatorname{Kern}\Delta$.

   (c) die Umkehrung von (a).

   (d) $\operatorname{Kern}(\Gamma \cap \Delta) = \operatorname{Kern}\Gamma + \operatorname{Kern}\Delta$.

<u>*Hinweis zu (c),(d):*</u> Die Dimensionsformel aus Satz 8.5 der Vorlesung.

2. (a) Sei $\varphi \in L(V)$. Die lineare Abbildung $\tau : V^* \longrightarrow V^*$ sei durch $\delta \mapsto \delta \circ \varphi$ definiert. Man zeige für jede Teilmenge Δ von V^*: $\operatorname{Kern}\tau(\Delta) = \varphi^{-1}(\operatorname{Kern}\Delta)$.

Man folgere daraus: $\operatorname{Kern}(\operatorname{Bild}\tau) = \operatorname{Kern}\varphi$.

(b) Mit Hilfe von (a) und Aufgabe 1 zeige man, daß die Zuordnung $\Delta \mapsto \operatorname{Kern}\Delta$ eine Bijektion von der Menge der Teilräume von V^* auf die Menge der Teilräume von V ist.

3. Seien $\varphi \in L(V)$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $\varphi^m = \mathrm{Id}_V$. Man zeige:

   (a) Jeder φ-zyklische Teilraum von V hat höchstens die Dimension m.

(b) Gibt es einen φ-zyklischen Teilraum von V der Dimension m, so hat φ einen von 0 verschiedenen Fixpunkt.

4. (a) Man konstruiere Matrizen $A, B \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \setminus \{I\}$ mit $A^3 = I$ und $B^2 = -I$.

   (b) Man zeige, daß es keine Matrix $C \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \setminus \{I\}$ mit $C^5 = I$ gibt.