Übungen zu

SS 2003 **Lineare Algebra II** **Serie 4**

1. Sei $F \in K^{n \times n}$ in einer Blockdarstellung der folgenden Form gegeben:

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Man zeige: $\det(F) = \det(A)\det(D)$.

2. Sei V ein Vektorraum, und seien X, Y Teilmengen von V. Man zeige, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(1) $X \cup Y$ ist linear unabhängig, und $X \cap Y = \emptyset$.

(2) X, Y sind linear unabhängig, und $\langle X \rangle \cap \langle Y \rangle = \{0\}$.

3. (Basis-Ergänzung) Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, T ein Teilraum von V und $(v_1, \ldots, v_k)$ eine geordnete Basis von T. Man zeige:

(a) Ist U ein Komplement von T und $(v_{k+1}, \ldots, v_{k+\ell})$ eine geordnete Basis von U, so ist $k+\ell = n$ und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V.

(b) Es gibt Vektoren $v_{k+1}, \ldots, v_n \in V$ derart, daß $(v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V ist.

4. (a) Man zeige: Ist φ ein Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$, aber keine Streckung, so gibt es einen mindestens 2-dimensionalen φ-zyklischen Teilraum von $\mathbb{R}^3$.

(b) Man gebe einen Endomorphismus φ von $\mathbb{R}^3$ an derart, daß φ keine Streckung ist und $\mathbb{R}^3$ nicht φ-zyklisch ist.