Übungen zu Lineare Algebra II

1. (a) Sei I ein kompaktes Intervall positiver Länge ℓ. Für alle $f \in C(I, \mathbb{R}_{>0})$ zeige man mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\frac{\ell^2}{\int f} \leq \int \frac{1}{f}.$$

(b) Indem man (a) auf $f := \mathrm{Id}_I$ für ein geeignetes Intervall I anwendet, beweise man:

$$\frac{2a}{a+2} \leq \log(a+1) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}_{>0}.$$

2. Sei (V, f) ein metrischer K-Vektorraum, der *anisotrop* ist, i.e.:

$$q(x) := f(x,x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in V\setminus\{0\}.$$

Man zeige:

(a) Für alle $u, v \in V$ gilt: $f(u,v)^2 = q(u)q(v) \iff (u,v)$ ist linear abhängig.

(b) Sei $F: K^3 \longrightarrow K$ durch $(a,b,c) \mapsto 4ab - (a+b-c)^2$ definiert. Für alle $u, v, w \in V$ gilt: u, v, w liegen genau dann auf einer Geraden, wenn

$$F(q(u-v), q(v-w), q(w-u)) = 0.$$

3. Man gebe eine 4-elementige Teilmenge M von $\mathbb{R}^3$ und ein $c \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft an: Für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt: $\cos \measuredangle(x,y) = c$.

4. Sei (V, f) ein endlich-dimensionaler nicht-ausgearteter metrischer K-Vektorraum. Man zeige, daß für jedes $\varphi \in O(V,f)$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(1) φ ist diagonalisierbar;

(2) $\varphi^2 = \mathrm{Id}_V$;

(3) es gibt einen Teilraum T von V so, daß $\varphi|_T = \mathrm{Id}_T$ und $\varphi|_{T^\perp} = -\mathrm{Id}_{T^\perp}$.