Übungen zu

SS 2003 **Lineare Algebra II** **Serie 13**

1. Sei (V,f) ein metrischer Vektorraum. Für Geraden $g = \langle u \rangle + v$ und $h = \langle w \rangle + z$ definieren wir:

$g \perp h :\Longleftrightarrow f(u,w) = 0$ und $g \cap h \neq \emptyset$.

g ist *isotrop* $:\Longleftrightarrow$ u ist isotrop.

Man zeige *die Existenz und Eindeutigkeit des Lotes* in folgendem Sinn:

Zu jeder nicht-isotropen Geraden g und jedem $x \in V \setminus g$ gibt es genau eine Gerade h mit der Eigenschaft: $x \in h$ und $h \perp g$.

2. Sei (K^n, f) ein metrischer Vektorraum derart, daß die Standard-Basis von K^n zugleich eine Orthogonalbasis bezüglich f ist. Die Gramsche Matrix von f bezüglich der Standard-Basis von K^n sei mit S bezeichnet. Weiter sei $\varphi \in O(K^n, f)$. Setze $A := M(\varphi)$. Man zeige:

(a) Für alle $x, y \in K^n$ gilt: $f(x,y) = x \cdot Sy$; dabei sei "$\cdot$" das Punktprodukt auf K^n.

(b) $A^T S A = S$.

(c) Falls f nicht-ausgeartet ist, gilt: $(\det \varphi)^2 = 1$.

3. Sei $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ der metrische Standard-Vektorraum. Man bestimme alle Matrizen $M(\varphi)$ mit $\varphi \in O(\mathbb{R}^2, \cdot)$.

4. Sei (V,f) ein endlich-dimensionaler nicht-ausgearteter metrischer Vektorraum. Für alle Teilräume T, U von V zeige man:

(a) $T \subset U \Rightarrow T^\perp \supset U^\perp$.

(b) $(T^\perp)^\perp = T$.

(c) $T^\perp \cap U^\perp = (T+U)^\perp$.

(d) $T^\perp + U^\perp = (T \cap U)^\perp$.