Übungen zu

SS 2003 **Lineare Algebra II** **Serie 12**

1. *(Spektralabbildungssatz)* Sei φ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraumes. Das *Spektrum von* φ, i.e. die Menge der Eigenwerte von φ, sei mit $\sigma(\varphi)$ bezeichnet. Man zeige:

   (a) Für jedes $g \in \mathbb{C}[x]$ gilt: Ist $g(\varphi)$ nicht injektiv, so hat g einen Eigenwert von φ als Nullstelle.

   (b) Für jedes $f \in \mathbb{C}[x]$ gilt: $\sigma(f(\varphi)) = \{f(r)\,;\, r \in \sigma(\varphi)\}$.

2. Sei φ ein Endomorphismus eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes mit dem charakteristischen Polynom $(x^2+1)^2(x^2+2)^3(x-1)^2x^4$. Das Minimalpolynom von φ habe den Grad 8. Welche Polynome kommen dafür in Frage?

3. Sei φ ein Endomorphismus eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes V mit der folgenden Eigenschaft: $\varphi^6 + \varphi^5 + \varphi^4 + \varphi^2 + \varphi = -\mathrm{Id}_V = -\varphi^6$. Man berechne das Minimalpolynom von φ.

4. Sei φ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraumes V mit dem charakteristischen Polynom $x^n - 1$. Man zeige, daß V φ-zyklisch ist.