Übungen zu

SS 2003 **Lineare Algebra II** **Serie 11**

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

1. Man beweise den Satz aus der Vorlesung:

   Ist A eine Begleitmatrix aus $K^{n \times n}$ mit der letzten Spalte $(a_0, \dots, a_{n-1})$, so ist $x^n - (a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)$ das charakteristische Polynom von A.

Man folgere daraus, daß jedes normierte Polynom aus $K[x]$ als charakteristisches Polynom eines Endomorphismus vorkommt.

2. Sei $A \in K^{n \times n}$ mit charakteristischem Polynom h. Man zeige: $h(0) = (-1)^n \det A$.

3. Man gebe zwei Matrizen aus $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ an, die keine Streckungsmatrizen sind, nicht zueinander ähnlich sind, aber dasselbe charakteristische Polynom haben.

4. Sei $A \in K^{n \times n}$, r ein Eigenwert von A und g aus $K[x]$. Man zeige: Ist r eine Nullstelle von g, so ist $\det g(A) = 0$.

5. Wo steckt der Fehler in dem folgenden "Beweis" des Satzes von Cayley-Hamilton?

   Sei $A \in K^{n \times n}$ mit charakteristischem Polynom h. Zu zeigen ist: $h(A) = 0$. Setzt man in $\det(xI - A)$ für x die Matrix A ein, so erhält man:

$$h(A) = \det(AI - A) = \det(A - A) = \det(0) = 0.$$