Übungen zu

SS 2003 **Lineare Algebra II** **Serie 1**

1. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, und $\mathfrak{T}$ eine Menge von echten Teilräumen von V mit den Eigenschaften:

$$\bigcup \mathfrak{T} = V, \qquad \text{und} \qquad \forall T, U \in \mathfrak{T}: \; T \neq U \;\Rightarrow\; T + U = V \text{ und } T \cap U = \{0\}.$$

Man zeige, daß alle Teilräume aus $\mathfrak{T}$ dieselbe Dimension haben.

2. Eine Matrix aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ heiße *magisch*, wenn ihre sämtlichen Zeilen- und Spaltensummen gleich sind. Die Menge der magischen Matrizen aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ sei mit $\mathfrak{M}_n$ bezeichnet.

Man zeige, daß $\mathfrak{M}_n$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist, und bestimme seine Dimension.

3. (a) Man zeige: Jede reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft:

$$x_{n+2} = x_{n+1} - x_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ist periodisch, d.h.: es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ so, daß $x_{n+k} = x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Man berechne explizit alle reellen Folgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft:

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

4. Man berechne die reellen Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die durch die folgenden Gleichungen gegeben sind:

$$x_1 = 1, \qquad y_1 = -1,$$

$$x_{n+1} = 2x_n + y_n, \qquad y_{n+1} = 4x_n - y_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$