Übungen zu

SS 2003 **Analysis II** **Serie 9**

1. Seien E, F Banach-Räume über $\mathbb{K}$, und sei $b: E \times E \longrightarrow F$ eine stetige bilineare Abbildung. Man zeige, daß durch $x \mapsto b(x,x)$ eine Fréchet-differenzierbare Abbildung $h: E \longrightarrow F$ definiert wird, und gebe ihre Ableitung an. Wie sieht diese aus, wenn b symmetrisch ist?

2. Man zeige, daß durch $(x,y) \mapsto (xy, x^2 - y)$ eine Fréchet-differenzierbare Funktion $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert wird, und gebe für jeden Punkt von $\mathbb{R}^2$ ihre Jacobi-Matrix an.

3. Seien E, F Banach-Räume über $\mathbb{K}$, und sei $h: E \longrightarrow F$ *homogen vom Grade* 1, i.e.: $h(tx) = t\,h(x)$ für alle $t \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x \in E$. Man zeige: Ist h differenzierbar im Punkte 0, so ist h linear und stetig. Man folgere daraus, daß keine Banach-Raum-Norm im Nullpunkt differenzierbar ist.

4. Sei $(p,q) \in \mathbb{R}^2$. Man zeige: Die Maximum-Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$ ist genau dann in (p,q) differenzierbar, wenn $|p| \neq |q|$.