Übungen zu

SS 2003 **Analysis II** **Serie 6**

1. Man zeige: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einem normierten Raum, so konvergiert auch die Folge $(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j)_{n\in\mathbb{N}}$, und zwar gegen denselben Grenzwert.

2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in einem metrischen Raum M, und sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Durch die Forderung

$$z_{2n-1} = x_n \quad \text{und} \quad z_{2n} = y_n \quad \text{für jedes } n\in\mathbb{N}$$

wird eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M definiert. Für die Bedingungen

(a) $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge,

(b) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge,

(c) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge,

beweise man: (a)$\Longleftrightarrow$(b) und (b)$\Rightarrow$(c), und zeige, daß (c)$\Rightarrow$(b) nicht allgemeingültig ist. Ferner zeige man: Ist $m\in M$ derart, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen m konvergiert, so ist (a) gleichbedeutend damit, daß auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bzw. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen m konvergiert.

3. Man zeige: (i) Je zwei endlich-dimensionale normierte Räume gleicher Dimension sind linear homöomorph.

(ii) Jeder endlich-dimensionale normierte Raum ist vollständig.

(iii) Jeder endlich-dimensionale Teilraum eines normierten Raumes ist abgeschlossen.

4. (i) Sei M ein halbmetrischer Raum, sei N eine Menge, und sei φ eine Bijektion von M auf N. Man gebe eine Halbmetrik auf N so an, daß φ zu einer Isometrie wird.

(ii) Man gebe eine Metrik d auf $\mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften an:

$(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig, aber die von d auf $\mathbb{R}$ induzierte Topologie stimmt mit der Standard-Topologie überein.

(Dazu verwende man etwa den metrischen Unterraum $]-1,1[$ von $\mathbb{R}$.)