Übungen zu

SS 2003 **Analysis II** **Serie 4**

1. Man zeige:

(i) Sei X ein Hausdorff-Raum, sei $m \in X$, und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen m konvergente Folge in X. Dann ist $L := \{x_n ;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{m\}$ Häufungs-kompakt.

(ii) Sei M ein metrischer Raum, sei N ein topologischer Raum, und sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Ist dann die Restriktion von f auf jede Häufungs-kompakte Teilmenge von M stetig, so ist f selber stetig.

2. Seien L, M, N halbmetrische Räume und V ein halbnormierter Raum. Man zeige:

(i) Für beliebige Lipschitz-stetige Abbildungen $g : L \longrightarrow M$ und $f : M \longrightarrow N$ ist $f \circ g$ Lipschitz-stetig.

(ii) Die Menge *Lip(M, V)* aller Lipschitz-stetigen Funktionen von M nach V ist ein Teilraum von V^M.

(iii) Seien $f : M \longrightarrow V$ und $g : M \longrightarrow \mathbb{K}$ beschränkte Lipschitz-stetige Funktionen; dann ist gf Lipschitz-stetig.

Kann man in (iii) die Voraussetzung der Beschränktheit wenigstens für eine der beiden Funktionen ersatzlos streichen?

Bleiben die Aussagen (i)-(iii) wahr, wenn man überall *Lipschitz-stetig* durch *gleichmäßig stetig* ersetzt?

3. (i) Man zeige, daß die komplexe Exponentialfunktion auf jeder Kreisscheibe Lipschitz-stetig ist.

(ii) Ist die reelle Exponentialfunktion Lipschitz-stetig?

(iii) Ist die durch $t \mapsto \exp(it)$ definierte Funktion $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ Lipschitz-stetig?

(iv) Ist die reelle Cosinus- und die reelle Sinus-Funktion Lipschitz-stetig?

4. Sei V ein normierter Raum, und seien $m \in V$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Man zeige: $K(m,r)$ ist homöomorph zu V.