Übungen zu

SS 2003 **Analysis II** **Serie 3**

1. Sei V ein halbnormierter Raum. Man zeige:

(i) $U := \{v \in V;\ \|v\| = 0\}$ ist ein Teilraum von V.

(ii) Für jeden Teilraum W von V sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) Auf jeder Nebenklasse von W ist $\|\cdot\|$ konstant.

(b) Es gibt eine Nebenklasse von W, auf der $\|\cdot\|$ konstant ist.

(c) Auf W ist $\|\cdot\|$ beschränkt.

(d) $W \subset U$.

2. Sei V ein halbnormierter Raum, und sei U ein Teilraum von V. Man zeige:

Durch $A \mapsto \inf\{\|w\|;\ w \in A\}$ wird eine Halbnorm auf V/U definiert, die genau dann eine Norm ist, wenn U in V abgeschlossen ist.

3. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Man zeige, daß durch die Äquivalenz von Halbnormen (siehe Satz 4.22) tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Halbnormen auf V definiert wird, und beweise direkt (ohne Zuhilfenahme von Satz 4.23), daß die in Beispiel 4.5 eingeführten Normen alle zueinander äquivalent sind.

4. Seien X_1, X_2 topologische Räume. Für jedes $j \in \{1,2\}$ sei A_j eine Teilmenge von X_j. Man zeige: $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$.

5. Sei X ein Häufungs-kompakter Hausdorff-Raum. Man zeige:

(i) Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge nicht-leerer abgeschlossener Teilmengen von X, so ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ nicht-leer.

(ii) Ist $\mathfrak{A}$ eine abzählbare Menge abgeschlossener Teilmengen von X derart, daß für jede endliche Teilmenge $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{A}$ die Menge $\bigcap \mathfrak{E}$ nicht-leer ist, so ist auch $\bigcap \mathfrak{A}$ nicht-leer.