**Übungen zu**

| | | |
|---|---|---|
| **SS 2003** | **Analysis II** | **Serie 2** |

1. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft:

$$\|zw\| = \|z\|\,\|w\| \qquad \text{für alle } z,w \in \mathbb{C}.$$

Man zeige: $\|\cdot\| = |\cdot|$. Dazu verifiziere man zuerst: $\|r\| = |r| = \|ir\|$ für alle $r \in \mathbb{R}$, sowie $\|\cdot\| \leq 2|\cdot|$.

2. (i) Sei V ein halbnormierter Raum. Für beliebige $m \in V$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ zeige man:

$$\overline{K(m,r)} = \overline{K}(m,r).$$

(ii) Man kläre, ob es einen metrischen Raum $(M,d)$, einen Punkt $m \in M$ und einen Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ so geben kann, daß die folgenden Aussagen erfüllt sind:

(a) $\overline{K}(m,r)$ ist nicht der Abschluß von $K(m,r)$.

(b) $\overline{K}(m,r)$ ist offen, aber keine offene Kugel.

(c) $K(m,r)$ ist abgeschlossen, aber keine abgeschlossene Kugel.

3. Sei $(M,d)$ ein metrischer Raum, und sei A eine nicht-leere Teilmenge von M.
Man zeige: Durch $x \mapsto d(x,A) := \inf\{d(x,a)\,;\, a \in A\}$ wird eine Funktion von M mit Werten in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert mit der Eigenschaft:

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y) \qquad \text{für alle } x,y \in M.$$

Mit Hilfe einer Zeichnung erläutere man die geometrische Bedeutung von $d(x,A)$ und führe den Beweis von Bemerkung 4.20.(ii) aus der Vorlesung durch.

4. Sei $(M,d)$ ein (halb)metrischer Raum. Man zeige, daß jede der folgenden Funktionen eine (Halb)metrik auf M ist, welche dieselbe Topologie wie d erzeugt:

(a) $\inf\{1,d\}$, (b) $\frac{d}{d+1}$, (c) $\sqrt{d}$.