

Zu Sinus und Cosinus

1. Für alle $x, y, z \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ mit der Eigenschaft " $x+y+z = \pi$ " zeige man:
- $$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z.$$

2. Man zeige:

- (i) Für alle $x, y \in I := [0, \frac{\pi}{2}[$ mit $x > y$ gilt: $\sin x - \sin y < \sin(x-y) < \tan x - \tan y$.
- (ii) Für alle $x \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sin x < n \sin \frac{x}{n} < \tan x$.
- (iii) Für alle $x \in I$ gilt: $\sin x \leq x \leq \tan x$.

Hinweis zu (ii): Man teleskopiere so, daß (i) anzuwenden ist.

Hinweis zu (iii): In (ii) führe man den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch.

3. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ beweise man mit Hilfe der dritten binomischen Formel:

$$\sin \frac{x}{2} \sum_{m=0}^n \cos(mx+y) = \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \cos\left(\frac{n}{2}x+y\right)$$

und

$$\sin \frac{x}{2} \sum_{m=0}^n \sin(mx+y) = \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x+y\right).$$

Topologische und normierte Räume; Stetigkeit

4. Sei x eine Folge in einem topologischen Raum M . Man zeige: Die Menge H aller Häufungswerte von x ist abgeschlossen.
5. Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Man berechne die Operatornorm der durch $x \mapsto (a_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definierten linearen Abbildung $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
6. Seien V, W normierte Räume, und sei $T : V \rightarrow W$ linear. Man zeige: T ist genau dann stetig, wenn jede Nullfolge in V durch T in eine beschränkte Folge in W abgebildet wird.
7. Seien E, F Banach-Räume. Man zeige, daß durch $(T, v) \mapsto T(v)$ eine stetige bilineare Abbildung $ev : L(E, F) \times E \rightarrow F$ definiert ist.

Häufungs-Kompaktheit und gleichmäßige Konvergenz

8. (Satz von Dini) Sei X ein Häufungs-kompakter Hausdorff-Raum, und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone Folge in $C(X, \mathbb{R})$, für die $f := \sup\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ ebenfalls in $C(X, \mathbb{R})$ liegt. Man zeige: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert dann gleichmäßig gegen f .

Hinweis. Man fixiere ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und wende die Übungsaufgabe 3.5.(i) auf die Folge der Mengen $A_n := \{x \in X; f(x) - f_n(x) \geq \varepsilon\}$, $n \in \mathbb{N}$, an.

Summierbarkeit

9. Seien $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}_{>0}$ derart, daß $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige: Ist b summierbar, so auch a .

10. Man zeige: (i) Für jedes $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $0 \leq x - \log(1+x) \leq \frac{1}{2}x^2$.

(ii) Die Folge

$$\left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \log(1+n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert in \mathbb{R} . Hinweis: Teleskopiere!

11. Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Mit dem Verdichtungs-Lemma von Cauchy zeige man: Die Folge $(n^{-1}(\log n)^{-\alpha})_{n \in \mathbb{N}_{\geq 2}}$ ist genau dann summierbar, wenn $\alpha > 1$.

12. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine nicht-summierbare Folge in $\mathbb{R}_{>0}$, und sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge ihrer Partialsummen. Man zeige:

- (i) $(a_n/s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht summierbar. (ii) $(a_n s_n^{-2})_{n \in \mathbb{N}}$ ist summierbar.

13. Man teste die folgenden Folgen auf Summierbarkeit:

$$(i) n^{2n} e^{-n^2}, \quad (ii) \left(\frac{\log n}{n} \right)^2, \quad (iii) \left(1 - \frac{\log n}{n} \right)^n.$$

14. Man berechne die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n!} z^{n^2}; \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2} z^{n^n}; \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n \log(n)} z^{3n+n^2}.$$

Differenzierbare Abbildungen

15. Man zeige, daß durch $(x, y) \mapsto (y - x^2)(y - 2x^2)$ eine differenzierbare Funktion $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert wird, die auf jeder Geraden durch $(0,0)$ in $(0,0)$ ein lokales Minimum hat, ohne daß $(0,0)$ eine lokale Minimalstelle von h selber ist.

16. Mit L (bzw. K) sei die reelle Gerade in \mathbb{C} durch die Punkte 5 und $5i$ (bzw. der Einheitskreis in \mathbb{C}) bezeichnet. Man finde differenzierbare Funktionen $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft " $g(\mathbb{R}) = L$ und $h(\mathbb{R}) = K$ ", berechne den sogenannten *Abstand* $\text{dist}(L, K) := \inf\{|\ell - k|; k \in K, \ell \in L\}$ von L und K und kläre, für welche $(\ell, k) \in L \times K$ der Abstand $|\ell - k|$ minimal ist. Hinweis. Man wende den Satz 6.35.(i) auf die durch $(x, t) \mapsto |g(x) - h(t)|^2$ definierte Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ an.

17. (i) Sei $f: X \rightarrow F$ eine C^1 -Funktion, sei Y eine super-perfekte Obermenge von $f(X)$ in F , und sei $g: Y \rightarrow G$ eine weitere C^1 -Funktion. Man zeige, daß auch $g \circ f$ eine C^1 -Funktion ist.

(ii) Sei $f: X \rightarrow F$ eine injektive C^1 -Funktion derart, daß $Y := f(X)$ super-perfekt ist und f^{-1} differenzierbar ist. Man zeige: Df^{-1} ist stetig.

18. Seien E, F, G und X so wie in der Vorlesung. $f: X \rightarrow F$ sei differenzierbar. Man zeige:

(i) Ist Df stetig, so trifft dies auch auf die sogenannte *Tangential-Abbildung* $Tf: X \times E \rightarrow F \times F$, $(x, \xi) \mapsto (f(x), Df(x) \cdot \xi)$, von f zu.

(ii) Ist Y eine super-perfekte Teilmenge von F , welche die Menge $f(X)$ enthält, so gilt für jede differenzierbare Abbildung $g: Y \rightarrow G$: $T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf)$.

19. Sei $\xi \in E$ derart, daß $[p, p + \xi] \subset X$. Ferner existiere $\partial_\xi f$ in jedem Punkt von $[p, p + \xi]$. Für jedes $y \in F$ zeige man:

$$\|f(p + \xi) - f(p) - y\| \leq \sup\{\|\partial_\xi f(p + t\xi) - y\|; t \in [0, 1]\}.$$

20. Man kläre, für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$g := \{(x, ax^2 + bx + c); x \in \mathbb{R}_{<1}\} \cup \{(x, \log x); x \in \mathbb{R}_{\geq 1}\}$$

a) differenzierbar, b) stetig differenzierbar, c) zweimal differenzierbar d) zweimal stetig differenzierbar ist.

21. Seien $p \in \mathbb{R}^n$ und $r, R \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $r < R$. Mit Hilfe von Satz 9.16 verifiziere man die Existenz einer C^∞ -Funktion $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$(i) 0 \leq \varphi \leq 1; \quad (ii) \varphi^{-1}(\{1\}) = \bar{K}(p, r); \quad (iii) \varphi^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}^n \setminus K(p, R).$$

22. (i) Man beschreibe das Monotonie-Verhalten der Funktion

$$f: \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto x^x,$$

und gebe die Grenzwerte von $f(x)$ für $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow +\infty$ an.

(ii) Sei $x \in \dot{\mathbb{R}}$. Man setze $a := \max\{0, -x\}$, beschreibe das Monotonie-Verhalten der Funktionen

$$g: \mathbb{R}_{>a} \longrightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t, \quad \text{und} \quad h: \mathbb{R}_{>a} \longrightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \left(1 + \frac{x}{t}\right)^{t+1},$$

und bestimme die Grenzwerte von $g(t)$ und $h(t)$ für $t \rightarrow a$ und $t \rightarrow +\infty$.

23. Mit der 2. Version des Umkehrsatzes zeige man, daß durch

$$(x, y) \mapsto (x \log y - e^{xy}, \sin(\frac{\cos x}{y}))$$

eine stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert wird, welche in der Nähe von $(0, 1)$ umkehrbar ist. Man berechne die Ableitung der Umkehrabbildung im Punkte $(-1, \sin 1)$.

24. Mit der Regel von de l' Hopital berechne man - sofern existent - die folgenden Grenzwerte:

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2)^{-1/2} \log(1+e^x).$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} (\tan x - \sin x) / x(1 - \cos x).$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} x \log(1 + \frac{1}{x}).$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2^x)^{\sin x}.$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0} (x^{-2} - (1 - \cos x)^{-1}).$$

Integration

25. Ohne Verwendung der Logarithmus-Funktion zeige man direkt, daß durch $x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$ eine streng monoton steigende stetig differenzierbare Funktion $L: \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert wird mit den folgenden Eigenschaften:

$$(i) L(xy) = L(x) + L(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}_{>0}; \quad (ii) -L \text{ ist konvex.}$$

26. Für jedes $f \in C([-1, 1], F)$ zeige man: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{f(t)}{\varepsilon^2 + t^2} dt = f(0)$.

Hinweis. Man reduziere den Beweis auf die folgenden Spezialfälle:

$$1. f \text{ ist konstant (} \arctan' = ? \text{)}. \quad 2. f(0) = 0 \left(\int_{-1}^1 \dots = \int_{-1}^{-\delta} \dots + \int_{-\delta}^{\delta} \dots + \int_{\delta}^1 \dots \right).$$