Übungen zu

SS 2003 **Analysis II** **Serie 16**

Zu Sinus und Cosinus

1. Für alle $x,y,z \in [0,\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$ mit der Eigenschaft "$x+y+z=\pi$" zeige man:

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z .$$

2. Man zeige:

(i) Für alle $x,y \in I := [0,\frac{\pi}{2}[$ mit $x>y$ gilt: $\sin x - \sin y < \sin(x-y) < \tan x - \tan y$.

(ii) Für alle $x \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sin x < n \sin\frac{x}{n} < \tan x$.

(iii) Für alle $x \in I$ gilt: $\sin x \le x \le \tan x$.

Hinweis zu (ii): Man teleskopiere so, daß (i) anzuwenden ist.

Hinweis zu (iii): In (ii) führe man den Grenzübergang $n\to\infty$ durch.

3. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x,y \in \mathbb{R}$ beweise man mit Hilfe der dritten binomischen Formel:

$$\sin\frac{x}{2} \sum_{m=0}^{n} \cos(mx+y) = \sin(\tfrac{n+1}{2}x)\cos(\tfrac{n}{2}x+y)$$

und

$$\sin\frac{x}{2} \sum_{m=0}^{n} \sin(mx+y) = \sin(\tfrac{n+1}{2}x)\sin(\tfrac{n}{2}x+y) .$$

Topologische und normierte Räume; Stetigkeit

4. Sei x eine Folge in einem topologischen Raum M. Man zeige: Die Menge H aller Häufungswerte von x ist abgeschlossen.

5. Sei $a \in R^n$. Man berechne die Operatoren-Norm der durch $x \mapsto (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definierten linearen Abbildung $T_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

6. Seien V,W normierte Räume, und sei $T: V \longrightarrow W$ linear. Man zeige: T ist genau dann stetig, wenn jede Nullfolge in V durch T in eine beschränkte Folge in W abgebildet wird.

7. Seien E,F Banach-Räume. Man zeige, daß durch $(T,v)\mapsto T(v)$ eine stetige bilineare Abbildung $ev: L(E,F)\times E \longrightarrow F$ definiert ist.

Häufungs-Kompaktheit und gleichmäßige Konvergenz

8. (Satz von Dini) Sei X ein Häufungs-kompakter Hausdorff-Raum, und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine isotone Folge in $C(X,\mathbb{R})$, für die $f := \sup\{f_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ ebenfalls in $C(X,\mathbb{R})$ liegt. Man zeige: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann gleichmäßig gegen f.

Hinweis. Man fixiere ein $\varepsilon\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ und wende die Übungsaufgabe 3.5.(i) auf die Folge der Mengen $A_n := \{x\in X;\ f(x)-f_n(x)\geq\varepsilon\}$, $n\in\mathbb{N}$, an.

Summierbarkeit

9. Seien $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}_{>0}$ derart, daß $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Man zeige: Ist b summierbar, so auch a.

10. Man zeige: (i) Für jedes $x\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $0 \leq x-\log(1+x) \leq \frac{1}{2}x^2$.

(ii) Die Folge

$$\Big(\big(\textstyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\big)-\log(1+n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert in $\mathbb{R}$. *Hinweis:* Teleskopiere!

11. Sei $\alpha\in\mathbb{R}_{>0}$. Mit dem Verdichtungs-Lemma von Cauchy zeige man: Die Folge $(n^{-1}(\log n)^{-\alpha})_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}}$ ist genau dann summierbar, wenn $\alpha>1$.

12. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nicht-summierbare Folge in $\mathbb{R}_{>0}$, und sei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge ihrer Partialsummen. Man zeige:

(i) $(a_n/s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht summierbar. (ii) $(a_n s_n^{-2})_{n\in\mathbb{N}}$ ist summierbar.

13. Man teste die folgenden Folgen auf Summierbarkeit:

$$\text{(i) } n^{2n}e^{-n^2}, \qquad \text{(ii) } \left(\frac{\log n}{n}\right)^2, \qquad \text{(iii) } \left(1-\frac{\log n}{n}\right)^n.$$

14. Man berechne die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(i) } \sum_{n=1}^{\infty}3^{-n!}z^{n^2}; \quad \text{(ii) } \sum_{n=1}^{\infty}e^{n^2}z^{n^n}; \qquad \text{(iii) } \sum_{n=1}^{\infty}e^{-2n}n^{\log(n)}z^{3n+n^2}.$$

Differenzierbare Abbildungen

15. Man zeige, daß durch $(x,y)\mapsto(y-x^2)(y-2x^2)$ eine differenzierbare Funktion $h:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definiert wird, die auf jeder Geraden durch $(0,0)$ in $(0,0)$ ein lokales Minimum hat, ohne daß $(0,0)$ eine lokale Minimalstelle von h selber ist.

16. Mit L (bzw. K) sei die reelle Gerade in $\mathbb{C}$ durch die Punkte 5 und 5i (bzw. der Einheitskreis in $\mathbb{C}$) bezeichnet. Man finde differenzierbare Funktionen $g,h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft "$g(\mathbb{R})=L$ und $h(\mathbb{R})=K$", berechne den sogenannten *Abstand* $\mathit{dist}(L,K):=\inf\{|\ell-k|\,;\ k\in K,\ \ell\in L\}$ *von L und K* und kläre, für welche $(\ell,k)\in L\times K$ der Abstand $|\ell-k|$ minimal ist. *Hinweis.* Man wende den Satz 6.35.(i) auf die durch $(x,t)\mapsto|g(x)-h(t)|^2$ definierte Funktion $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ an.

17. (i) Sei $f:X\longrightarrow F$ eine C^1-Funktion, sei Y eine super-perfekte Obermenge von $f(X)$ in F, und sei $g:Y\longrightarrow G$ eine weitere C^1-Funktion. Man zeige, daß auch $g\circ f$ eine C^1-Funktion ist.

(ii) Sei $f:X\longrightarrow F$ eine injektive C^1-Funktion derart, daß $Y:=f(X)$ super-perfekt ist und f^{-1} differenzierbar ist. Man zeige: Df^{-1} ist stetig.

18. Seien E, F, G und X so wie in der Vorlesung. $f:X\longrightarrow F$ sei differenzierbar. Man zeige:

(i) Ist Df stetig, so trifft dies auch auf die sogenannte *Tangential-Abbildung* $Tf:X\times E\longrightarrow F\times F,\ (x,\xi)\mapsto(f(x),Df(x)\cdot\xi)$, *von f* zu.

(ii) Ist Y eine super-perfekte Teilmenge von F, welche die Menge $f(X)$ enthält, so gilt für jede differenzierbare Abbildung $g:Y\longrightarrow G$: $T(g\circ f)=(Tg)\circ(Tf)$.

19. Sei $\xi\in E$ derart, daß $[p,p+\xi]\subset X$. Ferner existiere $\partial_\xi f$ in jedem Punkt von $[p,p+\xi]$. Für jedes $y\in F$ zeige man:

$$\|f(p+\xi)-f(p)-y\|\le\sup\{\|\partial_\xi f(p+t\xi)-y\|\,;\ t\in[0,1]\}\,.$$

20. Man kläre, für welche $a,b,c\in\mathbb{R}$ die Funktion

$$g:=\{(x,ax^2+bx+c)\,;\ x\in\mathbb{R}_{<1}\}\cup\{(x,\log x)\,;\ x\in\mathbb{R}_{\ge1}\}$$

a) differenzierbar, b) stetig differenzierbar, c) zweimal differenzierbar d) zweimal stetig differenzierbar ist.

21. Seien $p\in\mathbb{R}^n$ und $r,R\in\mathbb{R}_{>0}$ mit $r<R$. Mit Hilfe von Satz 9.16 verifiziere man die Existenz einer C^∞-Funktion $\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $0\le\varphi\le1$; (ii) $\varphi^{-1}(\{1\})=\overline{K}(p,r)$; (iii) $\varphi^{-1}(\{0\})=\mathbb{R}^n\setminus K(p,R)$.

22. (i) Man beschreibe das Monotonie-Verhalten der Funktion

$$f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}\,,\; x \mapsto x^x\,,$$

und gebe die Grenzwerte von $f(x)$ für $x \to 0$ und $x \to +\infty$ an.

(ii) Sei $x \in \dot{\mathbb{R}}$. Man setze $a := \max\{0, -x\}$, beschreibe das Monotonie-Verhalten der Funktionen

$$g : \mathbb{R}_{>a} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\; t \mapsto \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t, \quad \text{und} \quad h : \mathbb{R}_{>a} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\; t \mapsto \left(1 + \frac{x}{t}\right)^{t+1},$$

und bestimme die Grenzwerte von $g(t)$ und $h(t)$ für $t \to a$ und $t \to +\infty$.

23. Mit der 2. Version des Umkehrsatzes zeige man, daß durch

$$(x,y) \mapsto \left(x \log y - e^{xy}, \sin\left(\frac{\cos x}{y}\right)\right)$$

eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert wird, welche in der Nähe von $(0,1)$ umkehrbar ist. Man berechne die Ableitung der Umkehrabbildung im Punkte $(-1, \sin 1)$.

24. Mit der Regel von de l' Hopital berechne man - sofern existent - die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x^2)^{-1/2} \log(1 + e^x)$.

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} (\tan x - \sin x) / x(1 - \cos x)$.

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} x \log(1 + \frac{1}{x})$.

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2^x)^{\sin x}$.

(v) $\lim\limits_{x \to 0} (x^{-2} - (1 - \cos x)^{-1})$.

Integration

25. Ohne Verwendung der Logarithmus-Funktion zeige man direkt, daß durch $x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{t}$ eine streng monoton steigende stetig differenzierbaree Funktion $L : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert wird mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $L(xy) = L(x) + L(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$; (ii) $-L$ ist konvex.

26. Für jedes $f \in C([-1,1], F)$ zeige man: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-1} \frac{\varepsilon f(t)}{\varepsilon^2 + t^2}\, dt = f(0)$.

Hinweis. Man reduziere den Beweis auf die folgenden Spezialfälle:

1. f ist konstant ($\arctan' = ?$). 2. $f(0) = 0$ $\left(\int_{-1}^{1} \cdots = \int_{-1}^{-\delta} \cdots + \int_{-\delta}^{\delta} \cdots + \int_{\delta}^{1} \cdots\right)$.