Übungen zu

SS 2003 **Analysis II** **Serie 14**

1. Sei $f \in C(I, \mathbb{R}_{\geq 0})$. Man zeige: $\left(\int f^n\right)^{1/n} \to \|f\|_{uni}$ für $n \to \infty$.

2. (i) Für die folgenden Funktionen berechne man eine Stammfunktion:

   (α) $\mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 \log x$;

   (β) $\mathbb{R}_{>1} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x \log x}$;

   (γ) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(\frac{x}{e^{2x}}\right)^2$.

(ii) Man berechne die folgenden Integrale:

   (α) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan x \log(\cos x)\, dx$;

   (β) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos x^2\, dx$.

3. Sei $f \in C(\mathbb{R}, F)$. Man zeige:

   (i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird durch $x \mapsto n \int_0^{1/n} f(x+t)\, dt$ eine C^1-Funktion $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow F$ definiert.

(ii) Für jedes kompakte Teilintervall J von $\mathbb{R}$ konvergiert $f_n|_J$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen $f|_J$. (*Hinweis:* Satz 4.52).

4. Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton fallend. Man zeige: f ist genau dann uneigentlich integrierbar, wenn die Folge $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ summierbar ist.