Übungen zu

SS 2003 **Analysis II** **Serie 13**

1. (i) Man berechne direkt auf dem Wege über die Definition: $\int \mathrm{Id}_I$.

(ii) Man zeige, daß die durch

$$x \mapsto \begin{cases} 1/n, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \text{ und n der Nenner von x bei gekürzter Bruchdarstellung ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion ist, und berechne ihr Integral.

2. Man zeige: (i) Durch $f \mapsto \int |f|$ wird eine Halbnorm $\|\cdot\|_{\int}$ auf $\mathfrak{R}(I,F)$ definiert.

(ii) $C(I,F)$ ist bezüglich $\|\cdot\|_{\int}$ dicht in $\mathfrak{R}(I,F)$.

Ist $C(I,F)$ auch bezüglich $\|\cdot\|_{uni}$ dicht in $\mathfrak{R}(I,F)$?

Hinweis zu (ii): Zuerst approximiere man mit Hilfe stetiger Funktionen eine beliebige Treppenfunktion g mit nur einem einzigen von 0 verschiedenen Funktionswert y, für den $g^{-1}(\{y\})$ ein offenes Teilintervall von $\mathbb{R}$ ist.

3. Sei $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend. Für jede Partition $\mathfrak{P}$ von I nennt man

$$U_f(\mathfrak{P}) := \sum_{j=1}^{k} (t_j - t_{j-1}) f(t_{j-1}) \qquad \left(\text{bzw. } O_f(\mathfrak{P}) := \sum_{j=1}^{k} (t_j - t_{j-1}) f(t_j)\right)$$

die durch $\mathfrak{P}$ *definierte Untersumme* (bzw. *Obersumme*) *von f*, wobei $(t_0, \ldots, t_k)$ das durch $\mathfrak{P}$ definierte Tupel sei. Das Supremum (bzw. Infimum) aller Untersummen (bzw. Obersummen) von f nennt man das *Unterintegral* (bzw. *Oberintegral*) *von f.* und notiert es mit $\underline{\int} f$ (*bzw.* $\overline{\int} f$). Man zeige:

$$\underline{\int} f = \int f = \overline{\int} f.$$

Zu diesem Zweck stelle man die Untersummen und die Obersummen als Integrale von Treppenfunktionen dar und vergleiche zu einer beliebig vorgegebenen äquidistanten Partition die zugehörige Unter- mit der zugehörigen Obersumme.

4. Sei $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend und $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend. Man zeige: fg ist eine Regelfunktion mit der Eigenschaft: $\ell(I) \int fg \leq \int f \int g$.

Hinweis: Indem man g durch $g+y$ für ein geeignetes $y \in \mathbb{R}$ ersetzt, reduziere man den Beweis auf den Fall $\int g = 0$. In diesem Fall wähle man ein $c \in I$ so, daß $g|_{[a,c[} \geq 0$ und $g|_{]c,b]} \leq 0$, und folgere: $fg \leq f(c) g$.