Übungen zu

SS 2003 **Analysis II** **Serie 12**

1. Sei I ein reelles Intervall positiver Länge. Man bestimme alle differenzierbaren Funktionen $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft: $(*)\ \gamma' = \gamma^2$.

Hinweis: Ist $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Gleichung $(*)$, so folgt mit einem Monotonie-Argument, daß die Nullstellenmenge von γ ein Intervall ist.

2. Man zeige:

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird durch $x \mapsto |x|^{1+1/n}$ eine stetig differenzierbare Funktion f_n von $I := [-1,1]$ nach $\mathbb{R}$ definiert.

(ii) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f \in \mathbb{R}^I$. Ist f stetig? Ist f differenzierbar?

(iii) Die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion $g \in \mathbb{R}^I$. Konvergiert sie auch gleichmäßig?

3. Man kläre, für welche $x, y \in \mathbb{R}_{\geq e}$ die Ungleichung $x^y > y^x$ gilt, und zeige:

$$e^\pi > \pi^e .$$

4. Man verifiziere die Existenz der folgenden Grenzwerte und berechne sie:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-2}(\log(1+x+x^2) - x)$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-3}(e^x - 1 - x e^{x/2})$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}$.