Übungen zu

SS 2003 **Analysis II** **Serie 11**

1. Seien $g: X \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ und $a: X \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}\setminus\{1\}$ stetig differenzierbare Funktionen. Man beweise die Existenz einer stetig differenzierbaren Funktion $h: X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$g(x) = a(x)^{h(x)} \quad \text{für alle } x \in X.$$

Man berechne die Fréchet-Ableitung von h.

2. Man zeige, daß für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $z^3 + z + xy = 1$ genau eine Lösung $z \in \mathbb{R}$ hat, die man mit $z_{x,y}$ bezeichne. Man kläre, daß durch $(x,y) \mapsto z_{x,y}$ eine differenzierbare Abbildung $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert wird, und berechne mit der Formel aus dem Satz über implizite Funktionen wenigstens im Punkte $(1,1)$ ihre partiellen Ableitungen. Hat h Extemstellen?

3. Sei X eine perfekte konvexe Teilmenge von $\mathbb{K}$, und sei $f: X \longrightarrow F$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Man zeige: Die Abbildung

$$X \times X \setminus \mathrm{Id}_X \longrightarrow F, \quad (u,v) \mapsto \frac{f(v)-f(u)}{v-u},$$

läßt sich zu einer stetigen Abbildung von $X \times X$ nach F fortsetzen.

4. Sei E ein $\mathbb{R}$- und F ein $\mathbb{K}$-Banach-Raum, sei X eine offene Teilmenge von E derart, daß $tx \in X$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}_{>0} \times X$, sei $f: X \longrightarrow F$ differenzierbar, und sei $z \in \mathbb{K}$. Man beweise die Äquivalenz der beiden folgenden Bedingungen:

   (a) f ist *homogen vom Grade z*, i.e.: $f(tx) = t^z f(x)$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}_{>0} \times X$;

   (b) $Df(x) \cdot x = z f(x)$ für jedes $x \in X$ (*"Eulersche Gleichung"*).

Hinweis. Für den Beweis der Implikation "(b)$\Rightarrow$(a)" bringe man in der Gleichung aus (a) die Terme mit t auf eine Seite.