Übungen zu

SS 2003 **Analysis II** **Serie 10**

1. Für die durch $(x,y) \mapsto x^2 + 2xy + y^4$ definierte Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bestimme man alle lokalen und globalen Maximal- und Minimalstellen. Dazu verwende man die Sätze 2.98 und 6.40.(i) der Vorlesung.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Für beliebige $v, w \in \mathbb{R}^n$ sei $\langle v | w \rangle := \sum_{j=1}^{n} v_j w_j$. Man zeige:

(i) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist die Euklidische Norm $\| \cdot \|_2$ auf $\mathbb{R}^n$ in x differenzierbar, und es gilt:

$$D(\| \cdot \|_2)(x) = \frac{1}{\|x\|_2} \langle x | \cdot \rangle .$$

(ii) Ist $h : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine in p differenzierbare Abbildung mit $h(p) \neq 0$, so ist $g := \| \cdot \|_2 \circ h$ ebenfalls in p differenzierbar; man gebe die Ableitung an.

3. Mit Hilfe der Sätze 6.49 und 6.53 der Vorlesung formuliere und beweise man eine *Quotienten-Regel* für Fréchet-differenzierbare Abbildungen $f : X \longrightarrow F$ und $g : X \longrightarrow \dot{\mathbb{K}}$.

4. Sei $c := \frac{\pi}{2}$. Mit Hilfe des Umkehrsatzes zeige man, daß die Umkehrfunktionen der Funktionen

$$\text{(i) } \sin|_{]-c,c[}, \quad \text{(ii) } \cos|_{]0,\pi[}, \quad \text{(iii) } \tan|_{]-c,c[}$$

differenzierbar sind und berechne ihre Ableitungen.