

Übungen zu

SS 2003

Analysis II

Serie 1

1. Man berechne: (i) $\exp(\frac{1}{3}\pi i)$, (ii) $\exp(\frac{2}{3}\pi i)$, (iii) $\exp(\frac{1}{6}\pi i)$.

2. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$ setze man $z_k := \exp(2\pi i \frac{k}{n})$.

(i) Man berechne: $\sum_{k=1}^n z_k$, $\prod_{k=1}^n z_k$.

(ii) Für beliebige $z \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ verifiziere man die Gleichung

$$\sum_{k=1}^n |z - rz_k|^2 = n(|z|^2 + r^2).$$

(iii) Mit Hilfe von § G.9.15 - 9.17 zeige man: $\prod_{k=1}^n (z - z_k) = z^n - 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(iv) Man berechne: $\prod_{k=1}^{n-1} (1 + z_k)$.

3. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gebe man eine Polynom-Funktion P_n an mit der Eigenschaft:

$$\cos(nx) = P_n(\cos x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

4. Für die komplexe Cosinus-Funktion \cos bestimme man die Menge $\cos^{-1}(\mathbb{R})$.