§ 6 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

6.1 Die natürlichen Zahlen und der Induktionssatz

Anschaulich läßt sich die Struktur von $\mathbb{N}$ wie folgt beschreiben:

> *Man gelangt zu jeder natürlichen Zahl, wenn man, bei 1 beginnend, immer zur nächsthöheren Zahl übergeht und dieses Verfahren iteriert.*

So einleuchtend diese Aussage im ersten Moment auch ist, so fragwürdig ist sie in Wirklichkeit: Sie enthält bereits ein Unendlichkeitsphänomen ("immer", "iteriert") und ist daher nicht so ohne weiteres wörtlich zu nehmen. Zwar läßt sich in der Tat jede einzelne natürliche Zahl im Prinzip auf die angedeutete Weise erreichen. Aber die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen erhält man faktisch so nie, denn man muß ja den Prozeß irgendwann abbrechen. Die obenstehende Formulierung gaukelt nur vor, daß das unendliche Tun des Iterierens zu einem Abschluß kommt. In Wirklichkeit kann man weder unendlich viel tun noch unendlich viel sagen.

Dennoch: Die obenstehende Beschreibung von $\mathbb{N}$ läßt sich präzisieren, indem man sie nicht als eine Aussage über unendliches Tun, sondern als eine solche über eine unendliche Gesamtheit umformuliert. Dazu ist freilich zuerst die Menge $\mathbb{N}$ präzise zu definieren, was wir hier aber nicht durchführen. Wie bereits in § 2 erwähnt, werden wir stattdessen die natürlichen Zahlen mit ihren Rechengesetzen naiv verwenden.

Eine der grundlegenden Eigenschaften von $\mathbb{N}$, welche zugleich die obenstehende Beschreibung präzisiert, wird durch den folgenden Satz erfaßt.

Induktions-Satz. *Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(Ind.1) $\quad 1 \in M$;

(Ind.2) $\quad$ *für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *gilt:* $k \in M \Rightarrow k+1 \in M$.

Dann gilt: $M = \mathbb{N}$.

Mit anderen Worten: *Jede Teilmenge von $\mathbb{N}$, die die Zahl 1 und mit jeder Zahl k auch ihren Nachfolger $k+1$ enthält, ist bereits gleich $\mathbb{N}$.*

6.2 Das Induktionsprinzip

So selbstverständlich der Induktions-Satz klingt, so weitreichend sind seine Konsequenzen. Auf ihm beruht nämlich das sogenannte *Induktionsprinzip*, das man als Umformung des Induktionssatzes erhält:

Induktionsprinzip. *Sei $A(n)$ eine Aussageform über $\mathbb{N}$. Es gelte:*

(I.A.) $A(1)$;

(I.S.) *für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *gilt:* $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

Dann gilt $A(n)$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: durch Vergegenständlichung von $A(n)$. Die Menge $M := \{n \in \mathbb{N};\ A(n)\}$ erfüllt die Voraussetzungen des Induktionssatzes. Also ist sie gleich $\mathbb{N}$, i.e.: $A(n)$ gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$. ■

6.3 Der Beweis durch (vollständige) Induktion

Bei der Anwendung des Induktionsprinzips spricht man von einem *Induktionsbeweis.* Man gebraucht auch den Terminus *vollständige* Induktion, weil im Gegensatz zur induktiven Gewinnung naturwissenschaftlicher Aussagen aus experimentellen Beobachtungen das mathematische Vorgehen zu einer vollständigen Klärung führt: die Aussage gilt eben für alle natürlichen Zahlen.

Nach dem Induktionsprinzip sind beim Induktionsbeweis die beiden Voraussetzungen (I.A.) und (I.S.) zu verifizieren. Dies geschieht üblicherweise nach dem folgenden

Schema des Induktionsbeweises.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $A(n)$.

Beweis: durch (vollständige) Induktion (über n).

Induktionsanfang: Beweis von $A(1)$.

Induktionsschritt: Sei $k \in \mathbb{N}$. Es gelte die sogenannte *Induktionsvoraussetzung* (kurz I.V.) $A(k)$. Daraus leitet man dann die Gültigkeit von $A(k+1)$ her.

Es empfiehlt sich - wie oben bereits angedeutet -, beim Induktionsschritt eine andere Variable als "n" zu nehmen, da in der Praxis für die zu zeigende Aussage oft keine Abkürzung gewählt wird, sondern man sich mit den Worten *"die Aussage sei für $n=k$ (bzw. für $n=k+1$) wahr"* begnügt.

Beispiel. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:* $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

Beweis: durch vollständige Induktion.

I.A.: Offenbar gilt: $\sum_{j=1}^{1} j^2 = 1 = \frac{1}{6}(1+1)(2\cdot 1+1)$.

I.S.: Sei $k \in \mathbb{N}$. Es gelte:

$$\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k}{6}(k+1)(2k+1) \qquad (\text{I.V.}).$$

Dann folgt:

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^2 = \sum_{j=1}^{k} j^2 + (k+1)^2 \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{k}{6}(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 =$$
$$= \frac{k+1}{6}\big(k(2k+1) + 6(k+1)\big) = \frac{k+1}{6}(2k^2+7k+6).$$

Andererseits gilt: $\big((k+1)+1\big)\big(2(k+1)+1\big) = (k+2)(2k+3) = 2k^2+7k+6$. Damit ist die zu zeigende Gleichung auch für $n=k+1$ hergeleitet. ■

Übrigens erkennt man aus dem Beweis der Behauptung keineswegs, wie man auf die Formel kommt. Das ist für viele Induktionsbeweise typisch.

6.4 Vollständige Induktion mit beliebigem Anfang

Gelegentlich kommt es vor, daß die zu zeigende Aussage $A(n)$ auch für $n=0$ oder beispielsweise erst für $n \geq 5$ gilt. Dies erfordert die folgende Umformulierung des Induktionsprinzips.

Induktionsprinzip (mit beliebigem Anfang). *Sei $m \in \mathbb{Z}$. Und sei $A(n)$ eine Aussageform über der Menge $\mathbb{Z}_{\geq m} := \{k \in \mathbb{Z};\ k \geq m\}$. Es gelte:*

(I.A.) $A(m)$;

(I.S.) *für jedes $k \in \mathbb{Z}_{\geq m}$ gilt:* $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

Dann gilt $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq m}$.

Beweis. Wegen $\mathbb{Z}_{\geq m} = \{m+n-1;\ n \in \mathbb{N}\}$ wird durch

$$B(n) :\Longleftrightarrow A(m+n-1)$$

eine Aussageform $B(n)$ über $\mathbb{N}$ definiert, für die die Voraussetzungen des Induktionsprinzips erfüllt sind. Also gilt B(n) für jedes $n \in \mathbb{N}$, was bedeutet: A(n) gilt für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq m}$. ∎

Das entsprechende Schema ergibt sich durch naheliegende Abwandlung des in § 6.3 angegebenen Induktionsschemas.

Beispiel. *Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ gilt: $n^2 \leq 2^n$.*

Beweis: durch Induktion mit Induktionsanfang $n = 4$.

I.A.: Wegen $4^2 = 16 = 2^4$ gilt: $4^2 \leq 2^4$.

I.S.: Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 4}$. Es gelte die *I.V.:* $k^2 \leq 2^k$. Wegen $k \geq 4$ gilt: $(k-1)^2 \geq 9 \geq 2$, und somit $2k+1 = k^2 - (k-1)^2 + 2 \leq k^2 \leq 2^k$. Es folgt:

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}. \quad ∎$$

Anmerkung. Ein Blick auf den Beweis zeigt, daß die Argumentation im Induktionsschritt auch für $k = 3$ funktioniert. Dennoch ist die Ungleichung in der Behauptung für $n = 3$ falsch!

Als *Übungsaufgabe* beweise der Leser ebenfalls mit vollständiger Induktion den

Definitions-Satz (Division mit Rest). *Sei $m \in \mathbb{N}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es dann ein eindeutig bestimmtes $r \in \mathbb{N}_{<m} \cup \{0\}$ derart, daß m ein Teiler von $n-r$ ist. Dieses r heißt* der Rest von n bei der Division durch m *und wird mit* $r_m(n)$ *bezeichnet.*

6.5 Erleichterung des Beweises durch Verschärfen der Aussage

Manchmal widersetzt sich eine Aussage einem direkten Induktionsbeweis-Versuch, kann aber bewältigt werden, wenn man sie geeignet verschärft. Das klingt paradox, weil man sich ja das Leben schwerer zu machen scheint. Aber dies trifft nur für den Beweis des Induktionsanfangs zu, während man beim Induktionsschritt zwar eine schärfere Aussage herleiten muß, dazu aber auch eine schärfere Aussage in der Induktionsvoraussetzung zur Verfügung hat.

Beispiel. *Ein direkter Versuch, die Ungleichung*

$$\sum_{j=1}^{n} 1/j^2 \leq 2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

durch vollständige Induktion zu beweisen, scheitert. Jedoch gilt sogar für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{n} 1/j^2 \le 2 - \frac{1}{n}.$$

<u>*Beweis:*</u> durch vollständige Induktion.

<u>*I.A.*</u>: Für $n = 1$ gilt in $(*)$ sogar das Gleichheitszeichen.

<u>*I.S.*</u>: Sei $k \in \mathbb{N}$. Es gelte $(*)$ für $n = k$. Dann folgt:

$$\sum_{j=1}^{k+1} 1/j^2 = \sum_{j=1}^{k} 1/j^2 + 1/(k+1)^2 \overset{\text{I.V.}}{\le} 2 - 1/k + 1/(k+1)^2 = 2 - f(k),$$

wobei

$$f(k) := 1/k - 1/(k+1)^2 = \frac{(k+1)^2 - k}{k(k+1)(k+1)} = \frac{k^2+k+1}{k^2+k}\,\frac{1}{k+1} \ge \frac{1}{k+1},$$

also

$$-f(k) \le -\frac{1}{k+1}.$$

Folglich ist $(*)$ auch für $n = k+1$ wahr. ∎

6.6 Die Abschnittsinduktion

Manchmal kommt es auch vor, daß man die Aussage nicht verschärfen kann, aber die Induktionsvoraussetzung nicht ausreicht, um den Induktionsschritt durchzuführen, - beispielsweise weil man auch $A(k-1)$ verwenden muß. Das führt zu einer etwas anderen Art der Induktion:

Abschnittsinduktions-Prinzip. *$A(n)$ sei ein Aussageform über $\mathbb{N}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gelte:*

$$(*) \qquad \left(\forall \ell \in \mathbb{N}_{<k}: A(\ell)\right) \Rightarrow A(k).$$

Dann ist $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gültig.

<u>*Beweis*</u>. Durch

$$B(n) :\Longleftrightarrow \forall \ell \in \mathbb{N}_{\le n}: A(\ell)$$

wird eine neue Aussageform über $\mathbb{N}$ definiert. Es genügt zu zeigen, daß $B(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dies wird mit dem Induktionsprinzip bewerkstelligt.

<u>*I.A.*</u>: Für $k = 1$ besagt $(*)$: $A(1)$ und somit auch $B(1)$ ist gültig.

<u>*I.S.*</u>: Sei $k \in \mathbb{N}$. Es gelte $B(k)$. Mit $(*)$, angewendet für $k+1$ anstelle von k, erhält man dann: $A(k+1)$ ist gültig. Weil $B(k+1)$ wegen $\mathbb{N}_{\le (k+1)} = \mathbb{N}_{\le k} \cup \{k+1\}$ zu der Konjunktion "$B(k) \wedge A(k+1)$" äquivalent ist, gilt somit auch $B(k+1)$. ∎

6.7 Beweis durch Abschnittsinduktion

Führt man einen Beweis nach dem Abschnittsinduktions-Prinzip durch, so spricht von einem *Beweis durch Abschnittsinduktion.* Dazu ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Bedingung $(*)$ zu verifizieren. Dabei hält man sich an das

Schema der Abschnittsinduktion

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$.

Beweis: durch Abschnittsinduktion (über n).

Sei $k \in \mathbb{N}$. Es gelte die sogenannte *(Abschnitts-)Induktions-Voraussetzung* (auch mit *A.I.V.* notiert): $A(\ell)$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_{<k}$. Daraus leitet man dann $A(k)$ her.

Natürlich gibt es auch die Abschnittsinduktion mit beliebigem Anfang. Die entsprechende Umformulierung ist leicht erstellt. Wie man dabei verfährt, kann der Leser auch dem Beweis des folgenden Beispiels entnehmen. Der Vollständigkeit halber erinnern wir dazu an die

Definition. Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl $p \neq 1$, die nur von 1 und sich selber, also von keiner Zahl aus $\mathbb{N}_{<p} \setminus \{1\}$ geteilt wird.

Beispiel. *Jede natürliche Zahl $\neq 1$ ist ein Produkt von Primzahlen.*

Beweis: durch Abschnittsinduktion. Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Es gelte die A.I.V.: Jedes $\ell \in \mathbb{N}_{<k}$ mit $\ell \geq 2$ ist ein Produkt von Primzahlen.

1. Fall: k ist eine Primzahl. Dann ist k natürlich ein Produkt von Primzahlen, nämlich ein solches mit einen einzigen Faktor.

2. Fall: k ist keine Primzahl. Dann findet man Zahlen $\ell, m \in \mathbb{N}$ derart, daß $k = \ell \cdot m$ und $2 \leq \ell, m < k$. Da nach A.I.V. sowohl ℓ als auch m ein Produkt von Primzahlen ist, trifft dies auch auf k zu. ■

Bei der Abschnittsinduktion ist der Induktionsanfang in der Bedingung $(*)$ des Abschnittsinduktions-Prinzips versteckt: Man erhält ihn aus $(*)$ für $k=1$. Bei der Durchführung des Abschnittsinduktionsbeweises macht man oft eine Fallunterscheidung, deren erster Fall den "Induktionsanfang" umfaßt. Wie das Beispiel zeigt, sind es manchmal mehrere "Induktionsanfänge" (hier: alle Primzahlen).

6.8 Allgemeinere Verwendbarkeit der Technik des Induktionsbeweises

Induktionsbeweise können auch in Situationen durchgeführt werden, bei denen es vordergründig gar nicht um Aussagen über natürliche Zahlen geht. Will man für alle Objekte x eines bestimmten Typs eine Eigenschaft A(x) beweisen und kann man jedem der zulässigen Objekte x in geschickter Weise eine natürliche Zahl $\nu(x)$ zuordnen, so läßt sich die ursprüngliche Behauptung folgendermaßen umformulieren:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ *und alle zulässigen Objekte x gilt:* $\nu(x) = n \Rightarrow A(x)$.

Diese Aussage ist dann für einen Induktionsbeweis über n geeignet. Ein zugehöriges **Beweisschema** kann etwa folgendermaßen aussehen:

Behauptung: Für alle zulässigen Objekte x gilt A(x).

Beweis: durch Induktion über $\nu(x)$.

Induktionsanfang: Man zeigt A(x) für alle zulässigen Objekte x mit $\nu(x) = 1$.

Induktionsschritt: Sei x ein zulässiges Objekt mit $\nu(x) > 1$. Es gelte die I.V.:

Für alle zulässigen Objekte y gilt: $\nu(y) = \nu(x) - 1 \Rightarrow A(y)$.

Daraus leitet man dann A(x) her.

Entsprechend kann man den Beweis auch durch *Abschnittsinduktion über* $\nu(x)$ durchführen. Im folgenden Abschnitt demonstrieren wir dies an einem Beispiel, bei dem die zulässigen Objekte Paare $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sind und für $\nu(a,b)$ die Summe $a+b$ genommen wird.

Später werden wir häufig Aussagen über endliche Mengen M durch Induktion über $|M|$ (= Anzahl der Elemente von M) führen.

6.9 Ein Anwendungsbeispiel: Der Euklidische Hauptsatz für $\mathbb{Z}$.

Euklidischer Hauptsatz für $\mathbb{Z}$. *Sei p eine Primzahl. Dann gilt für beliebige* $x,y \in \mathbb{Z}$: *Ist p ein Teiler von xy, so ist p ein Teiler von x oder von y.*

Weiß man bereits, daß sich jede natürliche Zahl auf e i n d e u t i g e Weise als Produkt von Primzahlen schreiben läßt, ist die Behauptung des Satzes klar. Allerdings ist der Euklidische Hauptsatz für den Beweis der letzten Behauptung das entscheidende Hilfsmittel. Also bedarf es eines unabhängigen Beweises. Dazu dient der

Hilfssatz. *Sind a und b Teiler-fremde ganze Zahlen, so gibt es $x,y \in \mathbb{Z}$ so, daß*

$$ax + by = 1.$$

Beweis. Als erstes beobachten wir, daß für $a = 0$ (bzw. $b = 0$) die Behauptung offensichtlich ist, weil dann gilt: $b = 1$ (bzw. $a = 1$). Wegen der für alle $w,z \in \mathbb{Z}$ gültigen Gleichung $wz = (-w)(-z)$ genügt es daher, die Behauptung für beliebige Teiler-fremde $a,b \in \mathbb{N}$ zu beweisen. Dies bewerkstelligen wir durch Abschnittsinduktion über $a+b$. Seien dazu a,b Teiler-fremde natürliche Zahlen. Es gelte die A.I.V.:

> Für alle Teiler-fremden $c,d \in \mathbb{N}$ mit $c+d < a+b$ gibt es $x,y \in \mathbb{Z}$ so, daß $cx + dy = 1$ gilt.

1. Fall: $a = b$. Wegen der Teiler-Fremdheit gilt dann: $a = 1 = b$, also $a \cdot 1 + b \cdot 0 = 1$.

2. Fall: $a < b$. Weil a,b Teiler-fremd sind, trifft dies auch auf $a, b-a$ zu, und es gilt: $a + (b-a) = b < a+b$. Also findet man nach der A.I.V., angewendet auf $c = a$ und $d = b-a$, Zahlen $w,y \in \mathbb{Z}$ so, daß $aw + (b-a)y = 1$. Dann ist auch $x := w-y$ aus $\mathbb{Z}$, und es gilt: $ax + by = 1$.

2. Fall: $b < a$. Man wende den zweiten Fall auf (b,a) anstelle von (a,b) an. ∎

Beweis des Euklidischen Hauptsatzes. Seien $x,y \in \mathbb{Z}$. Es gelte: p teilt xy. Wir wählen $\ell \in \mathbb{N}$ so, daß $p\ell = xy$. Falls p kein Teiler von x ist, sind p und x Teiler-fremd, und nach dem Hilfssatz findet man $r,s \in \mathbb{Z}$ so, daß $pr + xs = 1$. Es folgt:

$$y = pry + xsy = p(ry + s\ell),$$

i.e. p teilt y. ∎

6.10 Das Minimalprinzip

Als eine weitere Anwendung des Abschnittsinduktions-Prinzips beweisen wir das

Minimalprinzip für $\mathbb{N}_0$. *Jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ hat ein kleinstes Element.*

Beweis. Sei T eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$. Zu zeigen ist nun die Implikation:

$$T \neq \emptyset \Rightarrow T \text{ hat ein kleinstes Element.}$$

Diese Implikation kann durch ihre logisch äquivalente Kontraposition ersetzt werden:

$$T \text{ hat kein kleinstes Element} \Rightarrow T = \emptyset.$$

Berücksichtigt man schließlich, daß die Gleichung $T=\emptyset$ zur Gleichung $\mathbb{N}_0\setminus T=\mathbb{N}_0$ äquivalent ist, so ist über die Menge T vorauszusetzen, daß sie kein kleinstes Element hat, und zu zeigen:

Für jedes $n\in\mathbb{N}_0$ gilt: $n\in\mathbb{N}_0\setminus T$.

Dies bewerkstelligt man durch Abschnitts-Induktion mit Anfang 0.

Sei dazu $k\in\mathbb{N}_0$. Weil 0 das kleinste Element von $\mathbb{N}_0$ ist und T kein kleinstes Element besitzt, gehört 0 nicht zu T, also ist $0\in\mathbb{N}\setminus T$. Damit ist der Abschnittsinduktions-Schritt im Fall "$k=0$" bereits verifiziert. Sei also $k\in\mathbb{N}$. Es gelte die

(A.I.V.) $\quad (\mathbb{N}_0)_{<k}\subset\mathbb{N}_0\setminus T$.

Dies impliziert: $\ell\geq k$ für jedes $\ell\in T$. Weil T kein kleinstes Element hat, gehört k nicht zu T, i.e. $k\in\mathbb{N}_0\setminus T$. ∎

6.11 Beweis nach dem Minimalprinzip

Das Minimalprinzip kann das Induktionsprinzips in Beweisen von Aussagen über natürliche Zahlen ersetzen. Man folgt dabei dem

Schema des Beweises nach dem Minimalprinzip.

Behauptung: Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt $A(n)$.

Beweis: nach dem Minimalprinzip.

Annahme: Es gibt ein $n\in\mathbb{N}$, für das $A(n)$ falsch ist. Dann ist die Menge

$$M:=\{n\in\mathbb{N};\ \text{non } A(n)\}$$

nicht-leer, hat also ein kleinstes Element m.

Anschließende Herleitung eines Widerspruchs, wobei die Minimalität von m meist eine entscheidende Rolle spielt.

Dieses Beweisschema ist also ein sogenannter *Widerspruchsbeweis*, in dem man die Annahme der Existenz eines kleinsten Gegenbeispiels (man spricht auch vom *"kleinsten Verbrecher"*) zum Widerspruch führt. Eine direkte Anwendung des Minimalprinzips findet man im Beweis der folgenden Aussage, die man natürlich auch unmittelbar aus dem Beispiel in § 6.7 folgern könnte.

Beispiel. *Jede natürliche Zahl $\neq 1$ hat einen* Primteiler, *i.e.: einen Teiler, der eine Primzahl ist.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Mit T sei die Menge aller von 1 verschiedenen Teiler von n bezeichnet. Wegen $n \in T$ ist T nicht-leer, besitzt nach dem Minimalprinzip also ein kleinstes Element m, welches wegen $T \subset \mathbb{N}_{\geq 2}$ von 1 verschieden ist. Wäre m keine Primzahl, so hätte m einen von 1 und m verschiedenen Teiler t, der dann auch zu T gehörte, was der Minimalität von m widerspräche. Also ist m doch eine Primzahl. ■

Übungsaufgabe: Man beweise den Satz über die Division mit Rest (siehe § 6.4), indem man für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Minimalprinzip auf die Menge $\{n-km;\ k \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N}$ anwende.

6.12 Das Maximalprinzip für beschränkte Teilmengen von $\mathbb{N}_0$

Eine andere Konsequenz des Minimalprinzips für $\mathbb{N}_0$ ist der

Satz. *Sei M eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}_0$, die* (nach oben) beschränkt *ist (i.e.: $M \subset \mathbb{N}_{\leq n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$). Dann hat M ein größtes Element.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Menge $T := \{n \in \mathbb{N}_0;\ M \subset \mathbb{N}_{\leq n}\}$ nicht-leer, besitzt also nach dem Minimalprinzip ein kleinstes Element k. Dann gilt: $M \subset \mathbb{N}_{\leq k}$, und $k \in M$, denn anderenfalls gälte: $M \subset \mathbb{N}_{\leq k-1}$, i.e.: $k-1 \in T$, was aber wegen der Minimalität von k ausgeschlossen ist. Die Bedingung "$k \in M \subset \mathbb{N}_{\leq k}$" bedeutet offenbar, daß k ein größtes Element von M ist. ■

6.13 Rekursives Definieren

Ebenso, wie es ein induktives Beweisverfahren gibt, gibt es auch ein induktives Definitionsverfahren. Diesem zufolge kann man Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Weise definieren, daß man sich x_1 beliebig vorgibt und für jedes $n \in \mathbb{N}$ festlegt, wie x_{n+1} aus x_n entsteht. Ein derartiges Vorgehen nennt man rekursiv, weil jeder Folgenkoeffizient durch *Rückgriff auf den vorhergehenden* der Reihe nach definiert wird. Um sicherzugehen, daß hierdurch tatsächlich genau eine Folge festgelegt wird, benötigt man den sogenannten

Rekursionssatz. *Sei M eine Menge, sei $a \in M$, und sei $R: M \times \mathbb{N} \longrightarrow M$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M mit den Eigenschaften:*

(i) $x_1 = a$ (Startgleichung);

(ii) $x_{n+1} = R(x_n, n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ (Rekursionsgleichung).

Beweis. Zum Nachweis der *Eindeutigkeit* fixiert man Folgen x, y in M mit den Eigenschaften (i) und (ii) und zeigt ohne Mühe mit vollständiger Induktion:

$$\forall n \in \mathbb{N}: x_n = y_n, \quad \text{i.e.:} \quad x = y.$$

Zur Durchführung des *Existenzbeweises* definieren wir einen Hilfsbegriff: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ verstehen wir unter einem *passenden k-Tupel* ein $x \in M^k$, für das (i) erfüllt ist und die Rekursionsgleichung in (ii) für jedes $n \in \mathbb{N}_{<k}$ gilt. Wie oben beweist man die folgende Eindeutigkeitsaussage:

(α) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es höchstens ein passendes n-Tupel.*

Des weiteren sieht man die beiden folgenden Aussagen unmittelbar ein:

(β) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_{<n}$ sowie jedes passende n-Tupel y ist $y|_{\mathbb{N}_{\leq k}}$ ein passendes k-Tupel.*

(γ) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes passende n-Tupel y ist $y \cup \{(n+1, R(y_n, n))\}$ ein passendes (n+1)-Tupel.*

Aus (α) und (γ) leitet man sofort mit vollständiger Induktion her, daß es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau ein passendes n-Tupel y^n gibt. Mit Hilfe von (β) folgert man, daß $x := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} y^n$ eine Folge ist, welche die Eigenschaften (i) und (ii) hat. ∎

Definition. Man sagt, *die Familie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist durch die beiden obigen Gleichungen (i) und (ii) rekursiv definiert,* wobei R auch *der zugehörige Rekursionsoperator* genannt wird.

Hinweis. Ebenso wie bei der Induktion kann man auch bei der Rekursion einen anderen Anfang als 1 wählen. Die diesbezügliche allgemeinere Formulierung des Rekursionssatzes überlassen wir dem Leser.

Beispiel. *Die Folge $(n!)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist definiert durch die Bedingungen:*

$$0! = 1 \quad \text{und} \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n! \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis. Wir setzen $a := 1$, definieren $R: \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}$ durch $(x, n) \mapsto x \cdot (n+1)$ und wenden den Rekursions-Satz an. ∎

6.14 Rekursives Definieren: Abschnittsrekursion

Wie bei der Abschnittsinduktion so kann es auch beim rekursiven Definieren vorkommen, daß man zur Festlegung eines Folgen-Koeffizienten nicht nur auf den unmittelbaren, sondern auf alle Vorgänger zurückgreift. Dies erfaßt der folgende Satz, den wir wieder der Einfachheit halber für den Anfang $n=1$ formulieren.

Satz. *Sei M eine Menge, und sei $a \in M$. Ferner sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Abbildung $R_n : M^n \longrightarrow M$ gegeben. Dann gibt es genau eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M mit der Eigenschaft:*

(i) $x_1 = a$; *(ii)* $x_{n+1} = R_n(x_1, \ldots, x_n)$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$.

Zum *Beweis* überträgt man nahezu wörtlich den Beweis des Rekursionssatzes aus dem vorangehenden Abschnitt.