§ 4 Abbildungen

4.1 Das Phänomen der Zuordnung

Betrachten wir einmal die folgenden Aussagen:

1. Jede Strecke hat eine Länge.
2. Beim Abzählen einer endlichen Menge gibt man jedem Element eine Nummer, wobei man bei 1 beginnt und keine Zahl ausläßt.
3. $y = 7x^3 - 5x + 9$.
4. Das arithmetische Mittel zweier Zahlen a,b ist $\frac{a+b}{2}$.
5. Bewegt sich ein punktförmiges Teilchen im Raum, so befindet es sich zu jedem Zeitpunkt t an einer bestimmten Stelle $p(t)$.

Diesen Aussagen ist gemein, daß sie irgendwie von einer Zuordnung handeln:

1. besagt, daß jeder Strecke eine bestimmte Zahl, ihre Länge zugeordnet ist.
2. beschreibt das Abzählen einer Menge als einen Vorgang, bei dem jedem Element eine Zahl zugeordnet wird.
3. bringt zum Ausdruck, daß man in den Term $7x^3 - 5x + 9$ verschiedene Zahlen für x einsetzen kann und dabei bestimmte Werte für y erhält, mit anderen Worten: jeder Zahl r wird die Zahl $7r^3 - 5r + 9$ zugeordnet.
4. gibt der Zuordnung $(a,b) \mapsto \frac{a+b}{2}$ einen Namen.
5. beschreibt die Bahnkurve eines Teilchens dadurch, daß jedem Zeitpunkt ein Punkt im Raum zugeordnet wird.

Man sieht, wieviel verschiedene Aspekte das Phänomen der Zuordnung hat. Was aber ist eine Zuordnung? Das Entscheidende an einer Zuordnung f ist sicherlich, daß sie jedem Element x einer bestimmten Menge M einen eindeutig bestimmten Wert $f(x)$ assoziiert. Es hat lange gedauert, bis man sich darauf verständigte, die Art der Zuordnung auf keine Weise einzuschränken. Noch im 19. Jahrhundert meinte man fordern zu müssen, daß $f(x)$ aus x durch irgendeine sinnvolle Rechenvorschrift entstehen muß. Aber dies erwies sich auf die Dauer als zu eng und konnte auch nicht recht präzisiert werden. Demzufolge definierte man eine mathematische Funktion als eine *Zuordnungsvorschrift*, durch die jedem Element x einer Menge ein Funktionswert $f(x)$ an die Seite gestellt wird. Diese "Definition" findet man auch heute noch gelegentlich. Aber sie ist fragwürdig, und zwar aus zwei Gründen:

Erstens sind Vorschriften etwas Sprachliches und daher nicht als mathematische Objekte geeignet; zweitens können verschiedene Vorschriften durchaus ein und dieselbe Zuordnung beschreiben.

Stattdessen ist der Beziehungscharakter von Zuordnungen unübersehbar, und man definiert sie daher als spezielle Relationen:

4.2 Der Abbildungsbegriff

Definition. (i) Eine Relation R heißt *nacheindeutig,* falls für alle $x \in \mathrm{Def}(R)$ und $y,z \in \mathrm{Bild}(R)$ gilt: $(x,y) \in R \wedge (x,z) \in R \Rightarrow y = z$.

(ii) Unter einer *Abbildung* (oder auch: *Funktion*) versteht man eine nacheindeutige Relation.

(iii) Ist f eine Abbildung, so gibt es zu jedem $x \in \mathrm{Def}(f)$ genau ein $y \in \mathrm{Bild}(f)$ so, daß $(x,y) \in f$; dieses y wird mit $f(x)$ (die sogenannte *Linksschreibweise*) oder mit f_x oder auch mit xf (die sogenannte *Rechtsschreibweise*) bezeichnet und *der Funktionswert von f an der Stelle x* genannt und meist als *"f von x"* gesprochen.

(iv) Gelegentlich werden Abbildungen f in der sogenannten *Familienschreibweise* $(f_x)_{x \in X}$ wiedergegeben, wobei X den Definitionsbereich von f bezeichnet; man spricht dann von f auch als von einer *"Familie"* und nennt den Definitionsbereich X die *Indexmenge* der Familie f.

Anmerkungen zur Bezeichnung.

(i) f(x) ist keine Funktion, sondern der Funktionswert von f an der Stelle x. Dieser Unterschied wird in der Literatur oft verwischt. Dort verwendet man auch vielfach die Schreibweise "$y = f(x)$" für die Funktion f und spricht von x als der *unabhängigen* und von y als der *abhängigen Variablen.* Dadurch wird die Sache vielleicht suggestiver, insgesamt aber eher verschwommener.

(ii) Diskussion der Links- und Rechtsschreibweise: Die Linksschreibweise f(x) bringt die Vorstellung des Einsetzens zum Ausdruck (*"x wird in f eingesetzt"*), während die (besonders bei den Algebraikern übliche) Rechtsschreibweise den Transformationsaspekt betont (*"x geht in xf über"*).

Veranschaulichung von Abbildungen. Da Abbildungen spezielle Relationen sind, lassen sie sich genauso wie Relationen veranschaulichen. In den Pfeildiagrammen geht bei einer Abbildung von jedem Element des Definitionsbereiches genau ein Pfeil aus. Bei der tabellarischen Darstellung einer Abbildung findet man in jeder Spalte nur eine einzige markierte Stelle vor. Bei der Veranschaulichung in der Zeichenebene liegt über jedem Punkt des Definitionsbereiches genau ein Punkt der Abbildung.

Beispiele. *(i) Ist M eine beliebige nicht-leere Menge und ist c ein mathematisches Objekt, so ist* $M \times \{c\}$ *eine Abbildung, nämlich die sogenannte* konstante Abbildung auf M *mit Funktionswert c.*

(ii) $\emptyset$ *ist eine Abbildung, nämlich die sogenannte* leere Abbildung.

(iii) Für jede Menge M ist $\mathrm{Id}_M := \{(x,x)\,;\ x \in M\}$ *eine Abbildung, nämlich die sogenannte* identische Abbildung *oder* Identität auf M.

Beispiele. *(i)* $\{(1,2),(2,1)\}$ *ist eine Abbildung.*

(ii) $\{(1,2),(1,1)\}$ *ist keine Abbildung.* ■

Gleichheitskriterium für Abbildungen: *Für beliebige Abbildungen f und g gilt:*

$$f = g \text{ genau dann, wenn } Def(f) = Def(g) \text{ und } f(x) = g(x) \text{ für jedes } x \in Def(f).$$

<u>*Beweis*</u>. "$\Rightarrow$" ist trivial. "$\Leftarrow$". "$\subset$". Sei $(x,y) \in f$. Dann ist $x \in \mathrm{Def}(f)$ und $y = f(x)$. Nach Voraussetzung ist dann auch $x \in \mathrm{Def}(g)$, und es gilt: $g(x) = y$, also $(x,y) \in g$. "$\supset$" erhält man aus der bereits bewiesenen Inklusion durch Vertauschen der Rollen von f und g. ■

Wie sich schon beim Gleichheitskriterium abzeichnet, ist es beim praktischen Umgang mit Abbildungen fast immer sinnvoll, nicht auf den Relationsaspekt zurückzugreifen, sondern mit den Funktionswerten zu arbeiten. Dies wird auch deutlich bei der folgenden

4.3 Umformulierung der Begriffe *Bild* und *Urbild* von Mengen unter Abbildungen

Bemerkung. *Sei f eine Abbildung, und sei M eine Menge. Dann gilt:*

(i) $f(M) = \{f(x)\,;\ x \in M \cap Def(f)\}$. *(ii)* $f^{-1}(M) = \{x \in Def(f)\,;\ f(x) \in M\}$. z1

Beweis. *(i)*. "$\subset$". Sei $y \in f(M)$. Dann findet man ein $x \in M$ so, daß $(x,y) \in f$. Also ist x aus Def(f), und weil f eine Abbildung ist, gilt: $y = f(x)$.

"$\supset$". Sei y aus der rechten Menge. Dann findet man ein $x \in M \cap \mathrm{Def}(f)$ so, daß $y = f(x)$. Das bedeutet: $(x,y) \in f$. Wegen $x \in M$ impliziert dies: $y \in f(M)$.

(ii). "$\subset$". Sei $x \in f^{-1}(M)$. Dann findet man ein $y \in M$ so, daß $(x,y) \in f$. Dann ist $x \in \mathrm{Def}(f)$, und weil f eine Abbildung ist, gilt: $f(x) = y \in M$.

"$\supset$". Sei x aus der rechten Menge. Dann ist $x \in \mathrm{Def}(f)$, und $y := f(x) \in M$. Wegen $(x,y) \in f$ impliziert dies: $x \in f^{-1}(M)$. ■

Als *Übungsaufgabe* gebe man sich eine Abbildung f sowie Mengen S, T vor und kläre, welche der folgenden Inklusionen, bzw. Gleichungen gültig sind:

(i) $f(f^{-1}(T)) \subset T$; (ii) $f(f^{-1}(T)) \supset T$; (iii) $f^{-1}(f(T)) \subset T$; (iv) $f^{-1}(f(T)) \supset T$;

(v) $f(T \cup S) = f(T) \cup f(S)$; (vi) $f^{-1}(T \cup S) = f^{-1}(T) \cup f^{-1}(S)$;

(vii) $f(T \cap S) = f(T) \cap f(S)$; (viii) $f^{-1}(T \cap S) = f^{-1}(T) \cap f^{-1}(S)$;

(ix) $f(T \setminus S) = f(T) \setminus f(S)$; (x) $f^{-1}(T \setminus S) = f^{-1}(T) \setminus f^{-1}(S)$.

4.4 n-Tupel und Folgen

Der Abbildungsbegriff ist so vielseitig, daß man damit auch Phänomene erfassen kann, bei denen man zunächst gar nicht an Abbildungen denkt. Dies ist zum Beispiel bei den sogenannten n-Tupeln der Fall. Ist nämlich n eine natürliche Zahl, so stellt man sich unter einem n-Tupel ein aus Objekten $x_1, \dots, x_n$ zusammengesetztes Objekt $(x_1, \dots, x_n)$ vor, bei dem es wie bei den Paaren auf die Reihenfolge ankommt. Um dies zu präzisieren, führen wir eine ganz allgemein sehr nützliche Notation ein:

Notation. Sei A eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}$, und sei $r \in \mathbb{R}$. Wir setzen:

$$A_{\le r} := \{a \in A;\ a \le r\}, \qquad A_{<r} := \{a \in A;\ a < r\},$$
$$A_{\ge r} := \{a \in A;\ a \ge r\}, \qquad A_{>r} := \{a \in A;\ a > r\}.$$

Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Unter einem *n-Tupel* versteht man eine beliebige Abbildung t mit der Eigenschaft: $\mathrm{Def}(t) = \mathbb{N}_{\le n}$. Für jedes $i \in \mathbb{N}_{\le n}$ heißt dann $t(i)$ *die i-te Komponente von t*. Etwas suggestiver schreibt man meistens $(t(i))_{i \in \mathbb{N}_{\le n}}$ oder $(t_i)_{i \in \mathbb{N}_{\le n}}$ oder auch vager $(t_1, \dots, t_n)$. Im Falle $n = 3$ (bzw. 4; bzw. 5) spricht man auch von einem *Tripel* (bzw. *Quadrupel*; bzw. *Quintupel*) und schreibt:

$$(t_1, t_2, t_3) \quad \text{(bzw. } (t_1, t_2, t_3, t_4)\text{; bzw. } (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)\text{)}.$$

Diskussion. (i) Die Tupel-Schreibweise ist knapper: Das Tripel (2,2,5) bezeichnet also die Abbildung {(1,2),(2,2),(3,5)}; das Quadrupel (4,1,2,9) die Abbildung

$$\{(1,4),(2,1),(3,2),(4,9)\}.$$

(ii) Bei den 2-Tupeln hat diese Konvention den Nachteil, daß sie mit der schon vorhandenen Bezeichnung für Paare kollidiert. Gelegentlich muß man daher bei der Interpretierung mathematischer Texte etwas Sorgfalt walten lassen. Im allgemeinen ist aber die Doppelbedeutung des Zeichens (a,b) als Bezeichnung für Paar und 2-Tupel unschädlich, zumal für beide Objekttypen ein und dasselbe Gleichheitskriterium gilt. Zur Unterscheidung vom 2-Tupel (x,y) notieren manche Autoren das Paar mit $(x;y)$, bzw. $\langle x,y\rangle$.

Ebenso wie die Tupel kann man auch Folgen definieren:

Definition. Unter einer *Folge* versteht man eine beliebige Abbildung f mit Def(f) = $\mathbb{N}$ (oder manchmal auch $\mathbb{N}_0$). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ nennt man f(n) *die n-te Komponente* oder *den n-ten Koeffizienten* der Folge. Anstelle von f(n) schreibt man auch f_n und dementsprechend anstelle von f auch $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4.5 Verankerte Abbildungen

Definition. Seien L, M Mengen.

(i) Ist f eine Abbildung mit den Eigenschaften:

(*) $\qquad \mathrm{Def}(f) = L \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(f) \subset M,$

so sagen wir *"f ist eine Abbildung von L in (oder: nach) M"* und drücken dies symbolisch so aus: $f\colon L \longrightarrow M$. Diese Aussage verwendet man der Kürze halber auch substantivisch: *"Die Abbildung $f\colon L \longrightarrow M$", "Sei eine Abbildung $f\colon L \longrightarrow M$ gegeben".* In dieser Situation nennt man die Menge M auch *Zielbereich von f* (nicht zu verwechseln mit dem Bildbereich!).

(ii) $M^L := \{f;\ f \text{ ist eine Abbildung von } L \text{ nach } M\}$ bezeichnet die Menge aller Abbildungen von L nach M (hier kann $\mathfrak{P}(L\times M)$ als Rahmenmenge dienen.)

Für Tupel, bzw. Folgen hat man speziell die

Definition. Sei M eine Menge.

(i) Ist $n \in \mathbb{N}$, so versteht man unter einem *n-Tupel in M* ein n-Tupel, dessen Komponenten in M liegen; die Menge $M^{(\mathbb{N}_{\leq n})}$ aller n-Tupel in M bezeichnet man meist mit M^n.

(ii) Unter einer *Folge in M* versteht man eine Folge, deren Werte in M liegen.

4.6 Das verallgemeinerte Cartesische Produkt

Gelegentlich ist es von Interesse, für jeden Argumentwert einer Funktion einzeln eine individuelle Menge zu spezifizieren, in der die Funktionswerte liegen. Auf diese Weise verankert man Abbildungen sozusagen "Funktionswert-weise". Das führt auf die

Definition. Sei L eine Menge, und sei $(M_\ell)_{\ell \in L}$ eine Familie von Mengen.

(i) Die *große Vereinigung über die Mengen M_ℓ, $\ell \in L$,* ist definiert als

$$\bigcup_{\ell \in L} M_\ell := \bigcup \{ M_\ell ;\ \ell \in L \} .$$

(ii) Die Menge

$$\{ f \in (\bigcup_{\ell \in L} M_\ell)^L ;\ \forall \ell \in L :\ f(\ell) \in M_\ell \}$$

notiert man mit $\prod_{\ell \in L} M_\ell$ oder $\underset{\ell \in L}{\times} M_\ell$ und nennt sie das *Cartesische Produkt der M_ℓ, $\ell \in L$.*

Ist $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $L = \mathbb{N}_{\leq n}$, so schreiben wir dafür auch $\prod_{j=1}^{n} M_j$ oder $M_1 \times \ldots \times M_n$.

4.7 Das Einführen von Abbildungen

Ist L eine Menge und T(x) irgendein Term, der für jedes $x \in L$ definiert ist, so schreibt man die Abbildung

$$f := \{ (x, T(x)) ;\ x \in L \}$$

auch in der Form

$$f : L \longrightarrow M,\ x \mapsto T(x),$$

und sagt: *"durch $x \mapsto T(x)$ wird eine Abbildung f von L nach M definiert".* Das heißt: Man führt Abbildungen sehr oft bereits in verankerter Form ein.

In dieser Schreibweise steckt allerdings eine Behauptung, nämlich: für jedes $x \in L$ gehört $T(x)$ zu M. Man sollte also in jedem konkreten Fall streng darauf achten, dies auch zu verifizieren - am besten, bevor man die Abbildung f definiert. Gegebenenfalls ersetze man zunächst M durch eine größere Menge N, von der leichter zu sehen ist, daß sie $T(x)$ für jedes $x \in L$ enthält.

4.8 Konstruktion neuer Abbildungen aus vorgegebenen Abbildungen

4.8.1 Restriktion von Abbildungen

Offenbar gilt der

Satz. *(i) Jede Teilmenge einer Abbildung ist wieder eine Abbildung.*
(ii) Der Durchschnitt einer Abbildung mit einer Relation ist stets eine Abbildung.

Dabei ist (ii) eine direkte Folgerung von (i).

Die in (ii) angesprochene Konstruktion von Abbildungen tritt in der Praxis häufig in der folgenden typischen Form auf:

Definition. Ist f eine Abbildung und M eine Menge, so nennt man die Abbildung

$$f|_M := f \cap M \times \mathrm{Bild}(f)$$

die Restriktion (oder: *Einschränkung*) *von f auf M.*

Bemerkung. *Seien f eine Abbildung und M eine Menge. Dann gilt:*
(i) $Def(f|_M) = Def(f) \cap M$. *(ii)* $(f|_M)(x) = f(x)$ *für alle* $x \in Def(f) \cap M$. ∎

4.8.2 Zusammenfügen von Abbildungen

Daß die Vereinigung zweier Relationen wieder eine Relation ergibt, ist klar (siehe § 3.9.3). Für Abbildungen ist dies nur unter einer zusätzlichen Voraussetzug wahr:

Satz. *Sind f und g Abbildungen derart, daß* $f(x) = g(x)$ *für jedes* $x \in Def(f) \cap Def(g)$, *so ist* $h := f \cup g$ *eine Abbildung mit der Eigenschaft:*

$$Def(h) = Def(f) \cup Def(g).$$

Üblicherweise wird dies so notiert:

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in Def(f) \\ g(x), & \text{falls } x \in Def(g) \end{cases}. \quad \blacksquare$$

Von der hier angegebenen Abbildung h sagt man auch, sie sei *durch Zusammenfügen von f und g entstanden.* Für sie gilt: $h|_{Def(f)} = f$ und $h|_{Def(g)} = g$.

Ein wichtiger Spezialfall dieses Satzes ist die

Folgerung. *Seien f,g Abbildungen. Sind Def(f) und Def(g) disjunkt, so ist $f \cup g$ eine Abbildung.* ■

Als <u>*Übungsaufgabe*</u> formuliere und beweise der Leser eine entsprechende Aussage über das Zusammenfügen einer Menge von mehr als zwei Abbildungen.

4.8.3 Hintereinanderausführung von Abbildungen

Das gemäß § 3.9.2 gebildete Relationen-Produkt zweier Abbildungen ist, wie wir gleich sehen werden, wieder eine Abbildung. Aus Gründen, die in Kürze sichtbar werden, werden wir das Relationen-Produkt von Abbildungen in Zukunft nahezu immer in der ebenfalls in § 3.9.2 eingeführten "Kringelschreibweise" notieren.

Satz. *Seien f,g Abbildungen. Dann ist $g \circ f$ eine Abbildung mit den Eigenschaften:*

(*) $\quad Def(g \circ f) = f^{-1}(Def(g))$,

und

(**) $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$ *für jedes* $x \in Def(g \circ f)$,

sowie

(***) $\quad Bild(g \circ f) = g(Bild(f))$.

<u>*Beweis*</u>. Seien x,u,v derart, daß $(x,u),(x,v) \in g \circ f$. Nach Definition von $g \circ f$ findet man dann y,z so, daß $(x,y),(x,z) \in f$ und $(y,u),(z,v) \in g$. Mit der Nacheindeutigkeit von f erhält man: $y = z$. Also ist $(y,u),(y,v) \in g$, so daß die Nacheindeutigkeit von g zur gewünschten Gleichung $u = v$ führt.

<u>*(*), ⊂*</u>. Sei $x \in Def(g \circ f)$. Dann findet man y und z so, daß $(x,y) \in f$ und $(y,z) \in g$. Folglich gehört x zu Def(f) und $f(x) = y$ zu Def(g), i.e. $x \in f^{-1}(Def(g))$.

(**) und (*), $\supset$. Sei $x \in f^{-1}(\mathrm{Def}(g))$. Dann ist $x \in \mathrm{Def}(f)$ und $y := f(x) \in \mathrm{Def}(g)$, also $(x, g(y)) \in g \circ f$, i.e. $x \in \mathrm{Def}(g \circ f)$ und $(g \circ f)(x) = g(y) = g(f(x))$.

(***), $\subset$. Dies folgt sofort aus (**).

(***), $\supset$. Sei $z \in g(\mathrm{Bild}(f))$. Dann findet man $y \in \mathrm{Def}(g) \cap \mathrm{Bild}(f)$ so, daß $g(y) = z$. Weil y zu Bild(f) gehört, findet man $x \in \mathrm{Def}(f)$ so, daß $f(x) = y$. Also ist $z = g(f(x))$. Wegen $x \in f^{-1}(\mathrm{Def}(g))$ ist dies nach (*) und (**) gleich $(g \circ f)(x)$. ∎

Folgerung. *(i) Sind f,g Abbildungen mit der Eigenschaft $\mathrm{Bild}(f) \subset \mathrm{Def}(g)$, so gilt:*

$$\mathrm{Def}(g \circ f) = \mathrm{Def}(f).$$

(ii) Ist f eine Abbildung von L nach M und g eine von M nach N, so ist $g \circ f$ eine von L nach N. ∎

Hinweis. Der Sinn der "Kringelschreibweise" für die Hintereinanderausführung von Funktionen liegt in ihrer Verträglichkeit mit der Linksschreibweise $f(x)$ für die Funktionswerte von f, wie sie in der Formel (**) aus dem voranstehenden Satz zum Ausdruck kommt: zuerst wird x in f und anschließend das Ergebnis $f(x)$ in g eingesetzt. Die ursprüngliche Notation für das Relationen-Produkt ist auf die Rechtsschreibweise für die Funktionswerte zugeschnitten; die Formel (**) lautet hier:

$$x(fg) = (xf)g \quad \text{für jedes } x \in \mathrm{Def}(fg).$$

4.9 Injektive Abbildungen

Wie das Beispiel $f := \{(1,3), (2,3)\}$ zeigt, braucht die Umkehrrelation einer Abbildung keine Abbildung zu sein.

Definition. (i) Eine Relation R heißt *voreindeutig,* falls für alle $v, w \in \mathrm{Def}(R)$ und $y \in \mathrm{Bild}(R)$ gilt: $(v,y) \in R \wedge (w,y) \in R \Rightarrow v = w$.

(ii) Eine Abbildung f heißt *injektiv* oder auch *Injektion* (oder auch: *1-1-Abbildung*), wenn sie voreindeutig ist. Unter Verwendung der Funktionswert-Schreibweise kann man dies so formulieren:

$$\forall u, v \in \mathrm{Def}(f): f(u) = f(v) \Rightarrow u = v;$$

per Kontraposition erweist sich dies als gleichwertig mit

$$\forall u, v \in \mathrm{Def}(f): u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v).$$

Daß eine verankerte Abbildung $f: L \longrightarrow M$ injektiv ist, notieren manche in der symbolischen Form $f: \rightarrowtail M$.

Satz. *Sei f eine Abbildung. Dann gilt:*

(i) f ist genau dann injektiv, wenn f^{-1} eine Abbildung ist.

(ii) Ist f injektiv, so ist auch f^{-1} injektiv, und es gilt:

$$f^{-1} \circ f = Id_{Def(f)}, \quad \text{und} \quad f \circ f^{-1} = Id_{Bild(f)}.$$

Beweis. (i). Eine Relation ist offenbar genau dann voreindeutig, wenn ihre inverse Relation nacheindeutig ist.

(ii). Wendet man (i) auf f^{-1} anstelle von f an und beachtet, daß $(f^{-1})^{-1}$ gleich f, also eine Abbildung ist, erhält man die Injektivität von f^{-1}. Sei nun $x \in Def(f)$. Dann gilt: $y := f(x) \in Bild(f)$, und $(x,y) \in f$. Es folgt: $(y,x) \in f^{-1}$, und somit $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x)$. Wegen

$$Def(f^{-1} \circ f) = f^{-1}(Def(f^{-1})) = f^{-1}(Bild(f)) = Def(f)$$

ist daher die erste Gleichung bewiesen. Die zweite Gleichung erhält man, indem man die erste auf f^{-1} anstelle von f anwendet. ■

Sprechweise. Wenn f injektiv ist, nennt man die zu f inverse Relation f^{-1} auch die *Umkehrabbildung von f*. Das darf aber nicht darüber hinwegtäuschen, daß eine Abbildung im allgemeinen keine Umkehrabbildung besitzt.

Die Eigenschaft der Injektivität vererbt sich auf Hintereinanderausführungen:

Satz. *Seien f,g Abbildungen. Sind dann f, g beide injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.*

Beweis. Seien $u,v \in Def(f)$ derart, daß $(g \circ f)(u) = (g \circ f)(v)$. Dann gilt auch $g(f(u)) = g(f(v))$. Wegen der Injektivität von g impliziert dies: $f(u) = f(v)$. Und wegen der Injektivität von f folgt: $u = v$. ■

Die Umkehrung gilt nur teilweise:

Satz. *Seien f,g Abbildungen derart, daß $g \circ f$ injektiv ist. Dann gilt:*

(i) $g|_{Bild(f)}$ ist injektiv. *(ii) $Bild(f) \subset Def(g) \Rightarrow$ f ist injektiv.*

Beweis. *(i)*. Seien $y,z \in \operatorname{Bild}(f)$ derart, daß $g(y) = g(z)$. Man findet $w,x \in \operatorname{Def}(f)$ so, daß $y = f(w)$ und $z = f(x)$. Es folgt: $(g \circ f)(w) = g(y) = g(z) = (g \circ f)(x)$. Wegen der Injektivität von $g \circ f$ impliziert dies: $w = x$ und somit $y = f(w) = f(x) = z$. Also ist $g|_{\operatorname{Bild}(f)}$ injektiv.

(ii). Es gelte: $\operatorname{Bild}(f) \subset \operatorname{Def}(g)$. Seien $u,v \in \operatorname{Def}(f)$ derart, daß $f(u) = f(v)$. Dann folgt:

$$(g \circ f)(u) = g(f(u)) = g(f(v)) = (g \circ f)(v) .$$

Die Injektivität von $g \circ f$ impliziert somit: $u = v$. Also ist f injektiv. ■

Ein nützliches Instrument zum Nachweis der Injektivität findet man in folgendem Satz, den man zur *Übung* beweise.

Satz. *Seien f,g injektive Abbildungen derart, daß $\operatorname{Def}(f) \cap \operatorname{Def}(g) = \emptyset$ und $\operatorname{Bild}(f) \cap \operatorname{Bild}(g) = \emptyset$ gilt. Dann ist $f \cup g$ eine injektive Abbildung.*

4.10 Surjektive Abbildungen

Definition. Sei f eine Abbildung und M eine Menge. Dann heißt f *surjektiv auf M* oder auch *Surjektion auf M*, wenn $\operatorname{Bild}(f) = M$.

Liegt die Abbildung in verankerter Form, also etwa in der Form $f: L \longrightarrow M$ vor, so läßt man den Zusatz *"auf M"* häufig weg und sagt: *"$f: L \longrightarrow M$ ist surjektiv"*. Das ändert aber nichts daran, daß in Gegensatz zur Injektivität die Surjektivität keine Eigenschaft von f allein, sondern eine des Paares (f,M) ist.

Die Surjektivität einer verankerten Abbildung $f: L \longrightarrow M$ bringen manche durch Verdoppelung der Pfeilspitze zum Ausdruck: $f: L \twoheadrightarrow M$.

Satz. *Seien L,M,N Mengen, und seien $f: L \longrightarrow M$ und $g: M \longrightarrow N$ Abbildungen. Dann gilt:*

(i) Ist f surjektiv auf M und g surjektiv auf N, so ist $g \circ f$ surjektiv auf N.

(ii) Ist $g \circ f$ surjektiv auf N, so ist g surjektiv auf N.

Beweis. *(i)*. Sei $z \in N$. Weil g surjektiv auf N ist, findet man $y \in M$ so, daß $g(y) = z$. Weil f surjektiv auf M ist, findet man $x \in L$ so, daß $f(x) = y$. Also ist $x \in \operatorname{Def}(g \circ f)$, und es gilt: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

(ii). Sei $y \in N$. Weil $g \circ f$ surjektiv auf N ist, findet man $x \in L$ so, daß $(g \circ f)(x) = z$. Also ist $y := f(x)$ aus Def(g) mit $g(y) = z$. ■

4.11 Bijektive Abbildungen

Definition. Sei f eine Abbildung und M eine Menge. Dann heißt f

- *bijektiv (oder: Bijektion) auf M*, falls f surjektiv auf M und injektiv ist;
- *Permutation von M*, falls Def(f) = M und f bijektiv auf M ist.

Eine verankerte Abbildung $f: L \longrightarrow M$ nennt man schlicht *"bijektiv"* oder *"eine Bijektion"* oder auch *"eine Bijektion von L auf M"*, wenn sie bijektiv auf M ist.

Achtung: Wie die Surjektivität ist auch die Bijektivität keine Eigenschaft von f allein, sondern eine des Paares (f,M)!

Auch die Bijektivität vererbt sich auf Hintereinanderausführungen, wie man durch Kombinieren der Sätze über die Vererbung der Injektivität und der Surjektivität aus den vorangehenden Abschnitten einsieht:

Satz. *Sind $f: L \longrightarrow M$ und $g: M \longrightarrow N$ Bijektionen, so ist auch $g \circ f: L \longrightarrow N$ eine Bijektion.* ■

Aussagen über die Umkehrung leite der Leser als Übungsaufgabe ebenfalls aus den Sätzen der vorangehenden Abschnitte her.

Der folgende Satz gibt eine Charakterisierung der Bijektivität an die Hand, mit der man in der Praxis häufig die Bijektivität von Abbildungen nachweist.

Satz. *Seien L, M Mengen, und sei f eine Abbildung von L nach M. Dann ist f genau dann eine Bijektion auf M, wenn es eine Abbildung g von M nach L mit der folgenden Eigenschaft gibt:*

(*) $\qquad g \circ f = Id_L, \quad$ *und* $\quad f \circ g = Id_M.$

Zusatz. *Ist f bijektiv auf M und ist $g: M \longrightarrow L$ eine Abbildung, so gilt (*) genau dann, wenn $g = f^{-1}$ ist.*

Beweis. "$\Rightarrow$". Sei f bijektiv auf M. Dann ist f injektiv, und es gilt: $L = \mathrm{Def}(f)$ und $M = \mathrm{Bild}(f)$. Nach dem ersten Satz aus § 4.6 ist $g := f^{-1}$ daher eine Abbildung mit den gewünschten Eigenschaften.

"$\Leftarrow$". Aus (∗) folgt mit Aussage (ii) des zweiten Satzes aus § 4.6, daß f injektiv ist, und mit Aussage (ii) des Satzes aus § 4.7, daß f surjektiv auf M ist.

Zum *Beweis des Zusatzes* ist nur noch zu zeigen, daß aus (∗) die Gleichung $g = f^{-1}$ folgt. Es gelte: (∗). Weil (wie wir bereits gesehen haben) wegen der Bijektivität von f auch f^{-1} die Bedingung (∗) erfüllt, folgt:

$$f^{-1} = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_M = f^{-1} \circ (f \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ g = \mathrm{Id}_L \circ g = g. \quad \blacksquare$$

Anmerkung. (i) Ist $g : M \longrightarrow L$ eine Abbildung mit der Eigenschaft (∗), so sagt man wegen der Aussage (ii) des Satzes auch: "*g ist zu f invers*".

(ii) Das Verfahren, den Bijektivitätsnachweis mit Hilfe des vorangehenden Satzes zu führen, nennt man auch *Beweis durch Konstruktion der Umkehrabbildung*. Dabei ist aber streng darauf zu achten, daß g zunächst unabhängig von f definiert wird. Denn erst nach erfolgtem Nachweis beider (!) Teilaussagen von (∗) entpuppt sich g als die Umkehrabbildung von f.